Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финансовый университет)

Благовещенский филиал Финуниверситета

МАТЕМАТИКА

Практикум по теме **«Исследование и построение Графика функции»**

по специальности 38.02.03 Операционная деятельность в логистике

Благовещенск 2023

Разработчик:

Ладо А.А., преподаватель ПЦК «Прикладная информатика» Благовещенского филиала Финуниверситета

Рассмотрено на заседание ПЦК «Прикладная информатика» рекомендовано к утверждению на заседании методического совета Благовещенского филиала Финуниверситета

Протокол от «15» ноября 2023 г. № 3
Председатель ПЦК «Прикладная информатика»
_____________ Е.И. Шпакова

УТВЕРЖДАЮ
председатель методического совета, зам. директора по учебно-методической работе
_____________ О.В. Ладоня
«22» ноября 2023г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

При помощи графического изображения различных видов измеряемых данных решаются многие практические задачи:

1) наглядное представление величины показателей (явлений) в сравнении друг с другом;

2) характеристика структуры какого-либо явления;

3) изменение явления во времени;

4) ход выполнения плана;

5) зависимость изменения одного явления от изменения другого;

6) распространенность или размещение каких-либо величин по территории.

Если возможно задать изменение изучаемых данных или явлений с помощью числовой функции, а именно аналитически (формулой). то для точного построения эскиза графика функции необходимо провести детальное ее исследование.

Полное исследование функции:

1. Область определения функции *D(y)*.

Область определения $D(y)$ – это множество всех значений аргумента $\boldsymbol{x}$, на котором задана функция. Другими словами – это промежуток по оси Ox, в пределах которого функция $f(x)$ непрерывна и определена.

К примеру, если функция непрерывна, то ответ таков: $D(y) = R$, где R – это множество всех значений x, от минус бесконечности до плюс бесконечности. В ином случае, точка разрыва включается в ответ. Пусть функция не определена в точке $x = 1$, тогда область определения исключает данную точку: $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1; +\infty)$.

Функция может иметь точки разрывы, если переменная x находится:

1) в знаменателе;

2) под корнем;

3) содержится в аргументе логарифмической, тригонометрии-ческой (tg или ctg) функций.

2. Четность, нечетность, периодичность функции.

Четность или нечетность показывает: существует ли симметричность функции относительно начала координат или оси ординат. Чтобы определить четность/нечетность, берем x со знаком минус, подставляем его в исследуемую функцию $f(x)$ на место обычных иксов и считаем. В случае, если на выходе имеем точно такую же функцию, как исходная, с такими же знаками всех коэффициентов, то говорят, что данная функция четная: Записывается так: $y(-x) = y(x)$. График четной функции симметричен относительно центра координат.

В случае, если на выходе получается исходная функция, но со знаком минус за скобками, то говорят, что функция нечетная и записывается это так: $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции, симметричен относительно оси ординат.

Существует и третий случай, когда на выходе получается «разношерстная» функция, в которой все знаки перемешались и не помогают никакие манипуляции, чтобы функция стала похожей на исходную или исходную со знаком минус. Тогда говорят, что данная функция ни четная, ни нечетная и она не обладает никакой симметрией, т.е. функция общего вида.

Свойство периодичности присуще тригонометрическим функциям, оно показывает существует ли период или другими словами некоторый повторяющийся регулярный интервал аргумента, при котором функция сохраняет свои значения при добавлении к аргументу этого периода на всей области определения.

3. Точки пересечения с осями координат *OX* и *OY*.

При пересечении графика функции $f(x)$ с осью OX, координата $y = 0$. Найденные точки будут иметь координаты $M_1(x_1;0)$, $M_2(x_2;0)$,...

При пересечении графика функции $f(x)$ оси OY, координата $x = 0$, соответственно точка пересечения будет иметь координаты $M_3(0;y)$.

4. Поиск вертикальных, наклонных или горизонтальных асимптот.

Традиционно исследование начинается с поиска вертикальных асимптот. В случае если функция *f(x)* терпит бесконечный разрыв в какой-либо точке x, то прямая, проведенная через эту точку параллельно оси OY, будет являться вертикальной асимптотой. Чтобы доказать это, необходимо вычислить пределы от исходной функции *f(x)* при *x,* стремящемся к минус и плюс бесконечности (если это возможно) или один из этих пределов: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. В случае, если хоть в одном из них получится ответ бесконечность, это и будет являться доказательством.

Далее идет поиск наклонных или горизонтальных асимптот. Многие иногда путаются в этих понятиях, считая их независимыми, не связанными друг с другом, что, конечно же, неверно. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, а горизонтальная – это частный случай наклонной, в котором коэффициент при x равен нулю ($k = 0$), ее уравнение $y = b$. Чтобы найти наклонную асимптоту функции *необходимо* вычислить два

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

Если коэффициент $k = 0$, то при поиске коэффициента b будет рассчитываться предел от функции f(x) и при подстановке в формулу $y = kx + b$ мы получим уравнение горизонтальной асимптоты $y = b$, т.е. прямую, параллельную оси икс. Если коэффициент k будет равен бесконечности, неважно плюс или минус, в таком случае дальнейшие вычисления не осуществляются, а в ответе записываем, что наклонные асимптоты отсутствуют.

5. Промежутки возрастания и убывания (промежутки монотонности), экстремумы функции.

Промежутки монотонности функции *f(x)* находятся при помощи первой производной. Алгоритм таков: берем первую производную от *f(x),* приравниваем результат производной к нулю $f'(x) = 0$, находим корень(корни) данного уравнения x_1, x_2

и т. д. Таким образом мы получаем экстремумы функции. Далее чертим ось *Ox* и отмечаем на ней закрашенными кружочками найденные корни x_1, x_2…

Нужно помнить, что если функция имеет точки разрыва в области определения, их также необходимо отметить на числовой оси, отмечая пустыми кружочками.

Получаем несколько промежутков, границами которых вперемешку являются точки из корней и точек разрыва, это не страшно, просто нужно будет это учитывать в дальнейшем при оформлении ответа. Далее начинаем исследовать знаки производной на каждом из полученных промежутков. Берем по одному числу из каждого промежутка, подставляем в производную $f'(x)$ и отмечаем знаки (плюс или минус), рисуя их прямо над осью в исследуемом промежутке.

Анализируем результаты, изучая каждую точку:

– закрашенная точка, в которой идет смена знаков с плюса на минус (смотрим слева и справа от точки) – это точка максимума. Под осью икс рисуем стрелочку вверх, там, где плюс и стрелочку вниз, там, где минус.

– закрашенная точка, в которой идет смена знаков с минуса на плюс – это точка минимума. Также помечаем стрелочками направления вниз и вверх.

– пустая точка (пустой кружок) – это точка разрыва и ее мы не имеем права записать в минимумы или максимумы, в этой точке функция не определена, не существует.

Итак, остается найти промежутки возрастания и убывания функции, или другими словами – промежутки монотонности. Промежутки, в которых стрелочка смотрит вверх это промежутки возрастания функции, где стрелочка вниз – промежутки убывания. Важный момент – учитываем точки разрыва (незакрашенные точки), когда записываем ответ.

Если в промежутке $(a;b)$ имеется точка разрыва ***c*** *(точка с пустым кружочком)*, то ответ записывается с учетом этой точки: $(a, c) \cup (c, b)$.

6. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функции.

Чтобы найти промежутки, в которых функция выпукла и вогнута, а также точки перегиба, необходимо найти вторую производную. Вторая производная берется от первой: $\left(f'(x)\right)' = f''(x)$.

Далее, как и в предыдущем пункте, приравниваем вторую производную к нулю, находим корни уравнения. Рисуем ось *Ox*, отмечаем найденные корни закрашенными точками, точки разрыва отмечаем пустыми кружочками.

Исследуем знаки второй производной на каждом из промежутков. Там? где вторая производная положительна – рисуем скобку в виде улыбки, здесь функция вогнута. В ином случае, рисуем унылую скобку, здесь функция выпукла. Соответственно, при записи промежутков вогнутости и выпуклости функции не забываем учитывать точки разрыва. Точки перегиба находим там, где вторая производная меняет свой знак с «+» на «–« и наоборот, и точка закрашенная.

7. Построение графика.

Учитывая все предыдущие расчеты и найденные величины – точки разрыва, точки пересечения с осями координат, асимптоты, точки экстремумы, точки перегиба, строим график исследуемой функции. Желательно делать это на листке в клетку с большим масштабом, чтобы как можно точнее получился график функции.

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

$$\boldsymbol{y = x^3 + x^2 - x - 3}$$

1. Область определения функции *D(y)*.

Т.к. данная функция непрерывна, то область ее определения

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty)$$

2. Четность, нечетность, периодичность функции.

Найдем значение функции в точке $(-x)$:

$$y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - x - 3 = -x^3 + x^2 + x - 3 \neq y(x)$$

Следовательно, функция не является четной.

$$y(-x) == -x^3 + x^2 + x - 3 = -(x^3 - x^2 - x + 3) \neq -y(x)$$

Следовательно, функция не является нечетной.
Вывод: функция общего вида (не симметрична относительно оси OY и начала координат).

3. Точки пересечения с осями координат $\boldsymbol{OX}$ и $\boldsymbol{OY}$.

Найдем точку пересечения с осью OY (она может быть только одна):

$$y(0) = (0)^3 + (0)^2 - 0 - 3 = -3$$

Получаем точку графика функции $\boldsymbol{A(0;-3)}$.
Найдем точки пересечения с осью OX (их может быть несколько):

$$x^3 + x^2 - x - 3 = 0$$

Стандартными методами данное уравнение решить не можем, воспользуемся методом подбора:

$$y(1) = (1)^3 + (1)^2 - 1 - 3 = 1 + 1 - 4 = -2 \neq 0$$
$$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 - 3 = -1 + 1 - 2 = -2 \neq 0$$
$$y(2) = (2)^3 + (2)^2 - 2 - 3 = 8 + 4 - 5 = 7 \neq 0$$
$$y(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 2 - 3 = -8 + 4 - 1 = -5 \neq 0$$

Так как ни в одном из данных выражений функция не стала равной 0, то делаем вывод о том, что корни данного уравнения найти затруднительно. Следовательно, точки пересечения графика функции с осью OX также затруднительно найти.

4. Поиск вертикальных, наклонных или горизонтальных асимптот.

Так как область функция на множестве действительных чисел непрерывна (см. пункт 1), то она не может иметь вертикальных асимптот.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x}$$

Так как наибольшая степень числителя дроби (3) больше наибольшей степени знаменателя (1), то такой предел равен 0. Следовательно, и угловой коэффициент предполагаемой наклонной асимптоты также $k = 0$. Наклонных асимптот график исследуемой функции не имеет.

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(x^3 + x^2 - x - 3 - 0 * x) = \infty$$

Значит, горизонтальных асимптот график исследуемой функции не имеет.

5. Промежутки возрастания и убывания (промежутки монотонности), экстремумы функции.

Найдем первую производную данной функции:

$$y' = (x^3 + x^2 - x - 3)' = 3x^2 + 2x - 1$$

Решим уравнение для того, чтобы найти критические точки функции:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0\ (a = 3; b = 2; c = -1)$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * 3 * (-1) = 16 > 0$$

Уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 * 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

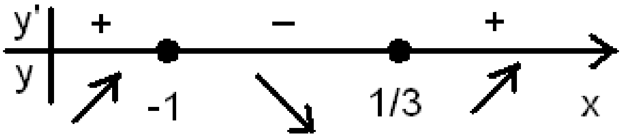
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 * 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

Отметим точки на числовой прямой, найдем знаки производной и обозначим монотонность функции на каждом промежутке:

$$y'(-2) = 3 * (-2)^2 + 2 * (-2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7 > 0$$

$$y'(0) = 3 * (0)^2 + 2 * (0) - 1 = -1 < 0$$

$$y'(1) = 3 * (1)^2 + 2 * (1) - 1 = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$$



Следовательно, функция возрастает на $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ и убывает на $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. Так как точки с ординатами $x = -1, x = \frac{1}{3}$ принадлежат области определения функции, то они являются точками экстремума. В точке с ординатой $x = -1$ происходит смена возрастания на убывание, значит, это точка максимума, в точке с ординатой $x = \frac{1}{3}$ происходит смена убывания на возрастание, значит, это точка минимума:

$$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 - 3 = -1 + 1 - 2 = -2$$

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 3 = \frac{1 + 3 - 9 - 81}{27} = -\frac{86}{27} \approx -3{,}2$$

Получили еще две точки графика функции: максимум $\boldsymbol{B(-1;-2)}$ и минимум $\boldsymbol{C\left(\frac{1}{3};-\frac{86}{27}\right) \approx C(0,3;-3,2)}$.

6. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба функции.

Найдем вторую производную данной функции:

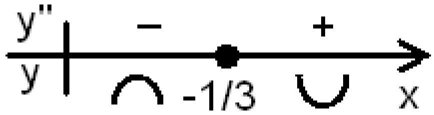
$$y'' = (3x^2 + 2x - 1)' = 3 * 2x + 2 = 6x + 2$$

Решим уравнение для того, чтобы найти критические точки функции:

$$6x + 2 = 0; x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Отметим точку на числовой прямой, найдем знаки производной и обозначим характер выпуклости функции на каждом промежутке:

$$y''(-1) = 6 * (-1) + 2 = -4 < 0$$
$$y''(0) = 6 * 0 + 2 = 2 > 0$$



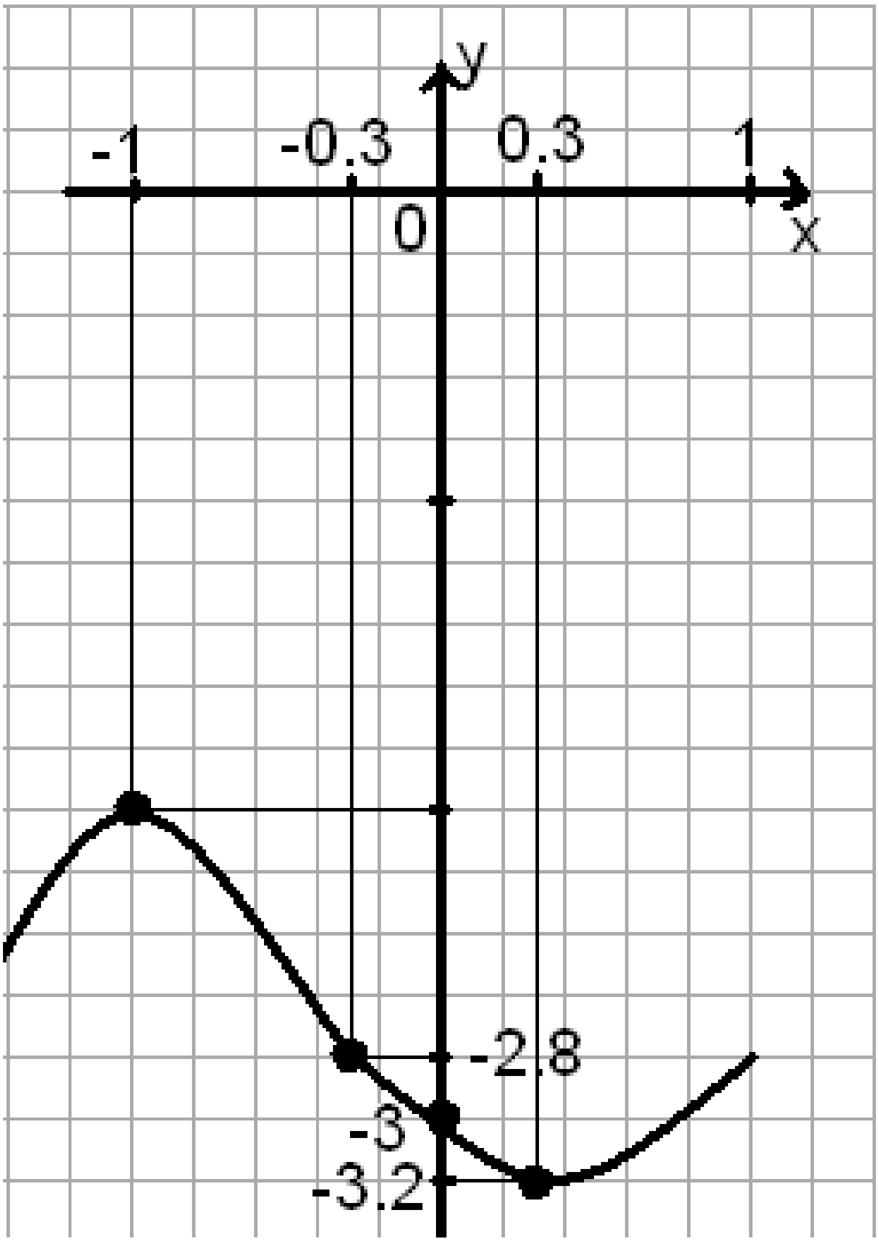
Следовательно, функция выпукла вверх на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и выпукла вниз на $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Так как точка с ординатой $x = -\frac{1}{3}$ принадлежит области определения функции и в ней происходит смена характера выпуклости, то она является точкой перегиба:

$$y\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{-1+3+9-81}{27} = -\frac{75}{27} \approx -2{,}8$$

Получили точку графика функции $\boldsymbol{D\left(-\frac{1}{3};-\frac{75}{27}\right) \approx (-0,3;-2,8)}$.

7. Построение графика функции.

Отметим найденные точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией.


y
-1
-0.3
0.3
1
0
x
-2.8
-3
-3.2

<u>Домашняя практическая работа</u>

Исследовать данную функцию, построить ее график. Вместо коэффициентов A, B, C, D подставьте числа в соответствии с номером варианта

$$\boldsymbol{y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$$

№ п/п	A	B	C	D
1	2	2	1	-3
2	2	-1	4	1
3	2	-2	0	2
4	-4	-2	1	2
5	-3	-2	-2	2
6	3	3	-3	4
7	-4	4	-4	-4
8	-2	-3	-1	-3
9	-2	-2	1	-3
10	1	3	-2	-2
11	-1	3	2	1
12	-1	2	-2	2
13	-1	4	-2	1
14	2	2	-1	0
15	-1	-3	-4	0
16	2	-1	4	-3
17	1	2	-3	1
18	1	3	-4	-4
19	1	3	1	-3
20	1	0	-2	3
21	3	0	1	-3
22	-3	-4	-3	-3
23	3	4	0	3
24	-4	2	-1	-4
25	3	-1	1	3

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2020. – 396 с. – (Серия : Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-02325-1. – Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299. – с. 238 – 249.

2. Высшая математика : учебник и практикум для СПО / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общ. ред. И. И. Цыганок. – М. : Издательство Юрайт, 2020. – 472 с. – (Серия : Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-01497-6. – Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/79006A6A-C94E-438B-AADE-B32FC5E081D5. – с.156-164.

3. Павлюченко, Ю. В. Математика : учебник и практикум для СПО / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан ; под общ. ред. Ю. В. Павлюченко. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2022. – 238 с. – (Серия : Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-01261-3. – Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/773FAB0F-0EF8-4626-945D-6A8208474676. – с.156 – 162.