Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**
Новороссийский филиал
Кафедра «Информатики, математики и общегуманитарные науки»

**Методические рекомендации**

# Математика

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика
Направленность (профиль): Анализ и управление рисками организаций
Программа подготовки: академическая
Форма обучения: очная
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Новороссийск 2018

Составители: к.экон. наук Н.В. Королёва

Рекомендованы решением кафедры «Информатики, математики и общегуманитарных дисциплин» протокол № 1 от 30.08.2018 г.

Методические рекомендации к составлены в соответствии с ОС ВО Финуниверситета по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», утвержденного приказом Финансового университета при Правительстве РФ № 2326/о от 26 декабря 2017 года.

Изучение дисциплины должно способствовать развитию у обучающихся стремления к творческому мышлению, к овладению навыками самостоятельной работы современными информационными технологиями.

**ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.**

- создание основы для развития логического мышления и математической культуры;
- формирование:

- базовых знаний и приобретение основных навыков использования математического аппарата для решения теоретических и прикладных задач экономики;
- необходимого уровня математической подготовки для освоения других математических и прикладных дисциплин, изучаемых в рамках конкретного профиля.

В ходе изучения дисциплины ставятся задачи:

Знать основные понятия, методики расчетов и методы исследований линейной алгебры, математического анализа и дискретной математики, необходимые для успешного решения финансовых и экономических задач анализа.

Уметь решать типовые прикладные задачи, создавать непрерывные и дискретные модели, применять теоретические методы для решения математических и экономических задач.

Владеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

### ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно доказать следующий результат.

**Теорема (правило Крамера).** Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Доказательство. Итак, рассмотрим систему 3-х уравнений с тремя неизвестными. Умножим 1-ое уравнение системы на алгебраическое дополнение $A_{11}$ элемента $a_{11}$, 2-ое уравнение – на $A_{21}$ и 3-е – на $A_{31}$:

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + A_{11}a_{13}x_3 = A_{11}b_1, \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + A_{21}a_{23}x_3 = A_{21}b_2, \\ A_{31}a_{31}x_1 + A_{31}a_{32}x_2 + A_{31}a_{33}x_3 = A_{31}b_3. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения:

$$\begin{gathered} (A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})x_2 + \\ + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \end{gathered}$$

Рассмотрим каждую из скобок и правую часть этого уравнения. По теореме о разложении определителя по элементам 1-го столбца

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta.$$

Далее рассмотрим коэффициенты при $x_2$:

$$A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично можно показать, что и $A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} = 0$.

Наконец несложно заметить, что

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

Таким образом, получаем равенство: $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$.

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично выводятся равенства $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$ и $\Delta \cdot x_3 = \Delta_3$, откуда и следует утверждение теоремы.

Таким образом, заметим, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

**Примеры.** Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+2\cdot 4-11=-8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10+28-26=-8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14+8-10=-16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26-20+22=-24.$$

Итак, $x$=1, $y$=2, $z$=3.

2. Решите систему уравнений при различных значениях параметра p:
$$\begin{cases} px+30y=p+30, \\ 30x+py=0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 30 \\ 30 & p \end{vmatrix} = p^2-30^2 \neq 0$$
. Поэтому $p \neq \pm 30$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+30 & 30 \\ 0 & p \end{vmatrix} = p(p+30), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p & p+30 \\ 30 & 0 \end{vmatrix} = -30(p+30).$$

1. При $p \neq \pm 30$ $\quad x = \dfrac{p(p+30)}{p^2-30^2} = \dfrac{p}{p-30}, \quad y = \dfrac{-30(p+30)}{p^2-30^2} = \dfrac{-30}{p-30}.$
2. При $p$ = 30 получаем систему уравнений $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 30x-30y=0, \end{cases}$ которая не имеет решений.
3. При $p$ = –30 система принимает вид $\begin{cases} -30x+30y=0, \\ 30x-30y=0, \end{cases}$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений $x=y$, $y$Î$R$.

## МЕТОД ГАУССА

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие $x_1$. Для этого второе уравнение разделим на $a_{21}$ и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на $a_{31}$ и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее $x_2$. Для этого третье уравнение разделим на $a'_{32}$, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти $x_3$, затем из 2-го уравнения $x_2$ и, наконец, из 1-го – $x_1$.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

**Примеры:** Решить системы уравнений методом Гаусса.

1. $$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-4) \\ \times(3)^{+} \\ \phantom{0} \end{array} \left| \begin{array}{c} \times 5 \\ + \\ \times 3 \end{array} \right. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \times(-1) \\ + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ -3y-2z=-5, \\ 4z=4. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{array}$$

2. $$\begin{cases} 3x-2y+3z=5, \\ x-5y+2z=3, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сведем ее к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-3) \\ + \\ \phantom{0} \end{array} \left| \begin{array}{c} \times(-2) \\ \phantom{0} \\ + \end{array} \right. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 13 & -3 & -10 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, несложно заметить, что третье уравнения системы будет ложным, а значит, система решений не имеет.

3. $$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 4x+6y-2z=6, \\ 3x-y+2z=-1. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку матрицы на 2 и поменяем местами первый и третий столбики. Тогда первый столбец будет соответствовать коэффициентам при неизвестной *z*, а третий – при *x*.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 2 & -1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\\ \\ \end{matrix}\Big|^{\times 2}_{+} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к системе уравнений. $\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 0=0, \\ 7x+5y=5. \end{cases}$

Из третьего уравнения выразим одну неизвестную через другую и подставим в первое.

$$\begin{cases} y=1-\dfrac{7}{5}x, \\ 2x+3-\dfrac{21}{5}x-z=3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=1-\dfrac{7}{5}x, \\ z=-\dfrac{11}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

## УСЛОВИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В соответствии с учебным планом по дисциплине «Математика» каждый студент должен выполнить домашнюю контрольную работу (по приведенным в данной брошюре вариантам) в сроки, установленные учебным графиком.

По контрольной работе. На собеседовании выясняется, насколько глубоко усвоен пройденный материал и соответствуют ли знания студента и его навыки в решении задач качеству представленной работы. Зачет по каждой контрольной работе студенты получают лишь после успешного прохождения собеседования.

Номер варианта контрольной работы определяется по *последней цифре номера личного дела студента, который совпадает с номером его зачетной книжки и студенческого билета*.

Сроки представления домашней контрольной работы на проверку указаны в индивидуальном графике студента, а для студентов дневных групп также сообщаются во время осенней установочной сессии. Однако эти сроки являются крайними. Чтобы работа была своевременно проверена, а при необходимости доработана и сдана повторно, ее надлежит представить значительно раньше указанного срока. Студентам дневных групп рекомендуется свою домашнюю контрольную работу выполнять во время установочной сессии, на которой излагается учебный материал. Это даст возможность студенту использовать свое пребывание в институте для консультаций по всем возникшим при выполнении работы вопросам. После окончания сессии в течение двух недель работу необходимо окончательно завершить, а затем представить на проверку.

Если в ходе написания работы у студента появятся вопросы или затруднения в решении задач контрольного задания, он может обратиться в институт за устной или письменной консультацией (например, по электронной почте на форум кафедры).

При изучении учебного материала и подготовке к контрольным работам рекомендуется использовать учебники и учебные пособия, электронные ресурсы, приведенные выше в разделе «Литература», а также данную брошюру.

После проверки контрольная работа студента получает оценку «Допускается к собеседованию» или «Не допускается к собеседованию».

Контрольная работа содержит набор заданий, при выполнении которых необходимо соблюдать следующие правила.

1. Работа должна быть выполнена в школьной тетради, имеющей широкие (не менее 3 см) поля для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради следует указать фамилию, имя, отчество (полностью), факультет, специальность, курс, номер личного дела, вариант и номер контрольной работы, а также фамилию преподавателя к которому направляется данная работа на проверку.
3. Перед решением каждой задачи нужно привести (распечатать, или переписать от руки) полностью ее условие.
4. Следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию примеров (задач).
5. Не допускается замена задач контрольной работы другими заданиями.
6. Решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями, нужно привести в общем виде используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений, а окончательный ответ следует выделить.
7. Чертеж к задаче 5 должен быть выполнен в прямоугольной системе координат в полном соответствии с данными условия задачи.
8. В конце работы приводится список использованной литературы (указывают автора, название, издательство, год издания), ставится дата окончания работы и подпись.
9. Если вычисления, выполняемые при решении задач, приближенные, то следует придерживаться правил приближенных вычислений.

Если работа получила в целом положительную оценку («Допускается к собеседованию»), но в ней есть отдельные недочеты (указанные в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить доработку на собеседовании. Если работа «Не допускается к собеседованию», ее необходимо в соответствии с требованиями преподавателя частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнить в той же тетради (если есть место) или в новой с надписью на обложке «Повторная», указав фамилию преподавателя, которым работа была ранее не зачтена. Вместе с незачтенной работой, повторную работу представить снова на проверку.

Контрольная работа не зачитывается, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет. Зачтенные работы предъявляются на экзамене и не подлежат возвращению после успешной сдачи экзамена.

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

### ВАРИАНТ 1

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1)***

**1.** Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = B \cdot A$ и выяснить, являются ли строки матрицы С линейно зависимыми.

**2.** Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 - 4x_4 = 9, \\ \quad - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 21. \end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.
Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?
Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 2

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)***

**1.** Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ -2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A\cdot B' + 2E$ и выяснить, имеет ли она обратную.

**2.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1,\\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1,\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1.\end{cases}$$

**3.**Выяснить, является ли совместной система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3,\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1,\\ 5x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9.\end{cases}$$

**4.** Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E)\to(E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

| Корма<br>Питат. вещества | Количество питательных веществ в 1 кг корма | |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| А | 2 | 1 |
| В | 2 | 4 |
| Цена 1 кг корма, т.руб. | 0,2 | 0,3 |

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 3

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)***

**1.** Решить матричное уравнение

$$BX + 2X = B',$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.** По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг

калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?
Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 4

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)***

**1.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B'$ и определить ее ранг.

**2.** Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = 7, \\ x_1 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед.. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 5

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)***

**1.**Решить матричное уравнение

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

**2.**По формулам Крамерарешить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

**4.** Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}),$$

**5.** Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов A и B на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

| Исходный продукт | Расход исходных продуктов на тонну краски, т | | Максимально возможный запас, т |
|---|---|---|---|
| | Краска E | Краска I | |
| A<br>B | 1<br>2 | 2<br>1 | 6<br>8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 6

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)***

**1.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = B \cdot A'$ и выяснить, имеет ли она обратную.

**2.**Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

**3.** Выяснить, является ли совместной система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 - x_4 + 5x_5 = 2, \\ -x_1 - 4x_2 - 10x_3 + 3x_4 - 9x_5 = -1, \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

**4.** Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Финансовый консультант фирмы «ABC» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25000$) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».

Анализируются акции «Дикси–Е» и «Дикси –В». Цены на акции: «Дикси–Е» - 5$ за акцию; «Дикси –В» - 3$ за акцию.

Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.

По оценкам «ABC» прибыль от инвестиций в эти две акции в следующем году составит: «Дикси–Е» - 1,1$; «Дикси –В» - 0,9$.

Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 7

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)***

**1.** Решить матричное уравнение

$$A\cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.** По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 14x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 30x_4 = 0. \end{cases}$$

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.
Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий

доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ден. ед., а от производства одной детали типа Y – 40 ден. ед.?
Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$$

**ВАРИАНТ 8**

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой8)***

**1.**Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$ и определить ее ранг.

**2.**Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -12. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$\left(A \middle| E\right) \to \left(E \middle| A^{-1}\right),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) $S_1S_2$ и $S_3$. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице

| Питательное вещество (витамин) | Необходимый минимум питательных веществ | Число единиц питательных веществ в 1 кг корма | |
|---|---|---|---|
| | | I | II |
| $S_1$ | 9 | 3 | 1 |
| $S_2$ | 8 | 1 | 2 |
| $S_3$ | 12 | 1 | 6 |

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.
Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание питательных веществ каждого вида было бы не менее установленного предела.
Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

## ВАРИАНТ 9

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой9)***

**1.** Решить матричное уравнение

$$X \cdot A = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

**2.** По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 17x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице

| Ресурсы | Норма затрат ресурсов на товары | | Общее количество ресурсов |
|---|---|---|---|
| | 1-го вида | 2-го вида | |
| 1 | 2 | 2 | 12 |
| 2 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 4 | 0 | 16 |
| 4 | 0 | 4 | 12 |

Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед.

Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.** Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

**ВАРИАНТ 10**

***(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)***

**1.** При каких значениях $\lambda$ ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \lambda & -2 & -6 \\ 1 & \lambda & 15 \end{pmatrix}$$

равен двум?

**2.** Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 9x_4 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 7x_4 = -17, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -7, \\ 4x_1 + 7x_2 - 15x_3 - 5x_4 = -27. \end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

**4**. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \to (E|A^{-1}),$$

**5.**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно и распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?
Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

**6.**Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$