Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Новороссийский филиал
Кафедра «Информатики, математики и общегуманитарные науки»

Н.В. Королёва

Методические рекомендации
Математика

Направление подготовки: 38.03.02 «Менеджмент»
Направленность (профиль): Корпоративное управление
Программа подготовки: академическая
Форма обучения: очная , заочная,очно-заочная
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Новороссийск 2019

1.1. Матрицы и определители. Основные понятия.

Определение 1.*Матрицей* размерности **m**x**n** называется прямоугольная таблица из элементов любой природы, имеющая **m** строк и **n** столбцов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=A_{m\times n}$$

a_{ij} – это элементы матрицы А, где i – номер строки, в которой находится элемент j – номер столбца.

Определение 2. Строка матрицы называется нулевой, если все её элементы равны нулю.

Определение 3. Если хотя бы один из элементов строки матрицы не равен нулю, то строка называется ненулевой.

Пример 1.

Первая и третья строки ненулевые, вторая нулевая.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 4. Нулевой столбец - это столбец, где все элементы равны нулю.

Определение 5. Ненулевой столбец – это столбец, где хотя бы один из элементов не равен нулю

Определение 6. Диагональ матрицы, проведённая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется главной.

Определение 7. Диагональ, проведённая из левого нижнего угла в правый верхний угол, называется побочной.

Определение 8. Если у матрицы количество строк равно количеству столбцов, то такая матрица называется квадратной и обозначается $A_{n\times n}$

Определение 9. Если все элементы матрицы равны нулю, то она называется нулевой.

Определение 10. Если матрица состоит из одной строки, то она называется векторстрокой.

Пример 2. $A = (2 \quad 6 \quad 0)$

Определение 11. Если матрица состоит из одного столбца, то она называется вектор-столбцом.

Определение 12. Если у квадратной матрицы элементы стоящие на главной диагонали не равны нулю, а все остальные элементы равны нулю, то матрица называется диагональной.

Пример 3. Диагональная матрица.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Определение 13. Если у диагональной матрицы, по главной деагонали стоят единицы, то она называется единичной.
Единичную матрицу обычно обозначают символом E.

Пример 4.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 14. Если у матрицы все элементы, расположенные ниже главной диагонали равны нулю, то такая матрица называется треугольной. **Пример 5.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Действия над матрицами

Определение 15. Произведением матрицы A начислоkназывается матрица B = $k \cdot$ A того же размера, полученная изисходной умножением на заданное число всех ее элементов: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Пример 6.Умножим число 3 на матрицу.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Пример 7.Умножим $\frac{1}{2}$ на матрицу.

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & 6 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матрицы на число.

- 1 · A = A
- 0 · A = Θ, где Θ - нулевая матрица
- k · (A + B) = k · A + k · B
- (k + n) · A = k · A + n · A
- (k · n) · A = k · (n · A)

Определение 16. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C=A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i=1,2,3...,m; j=1,2,…n (матрицы складываются поэлементно)

Определение 17. Аналогично сложению, при вычитании матриц одного размера, матрицы вычитаются поэлементно, т.е. $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ **Пример 8.**

Сложить матрицы $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$

Решение.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример 9.

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Решение.

$$A - C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) & 5 - 1 & 1 - 2 \\ -2 - 3 & 0 - 4 & 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение 18. Пусть матрица A имеет размер $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$. То есть число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда произведение матриц $A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$ называется такая матрица $C_{m \times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i – й строки матрицы A на соответствующие элементы j – го столбца матрицы B.

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1,2,...,m; \quad j = 1,2,...,n.$$

Свойства умножения матриц.

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, (свойство ассоциативности)
- $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$, где k- число.
- $A(B + C) = AB + AC$ (свойство дистрибутивности)
- $E \cdot A = A \cdot E$ - умножение на единичную матрицу.
- $AB \neq BA$ - произведение матриц не коммутативно

Пример 10. Найти матрицу C равную произведению матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

$-3 \quad 4$

Решение.

$$A * B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 + 2\cdot(-3) & 4\cdot 1 + 2\cdot 4 \\ 9\cdot 3 + 0\cdot(-3) & 9\cdot 1 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}$$

Пример 11. Найти произведение матрицы $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(5\cdot 2+8\cdot(-3) + (-4)\cdot 1 \quad 6\cdot 2+9\cdot(-3) + (-5)\cdot 1 \quad 4\cdot 2+ 7\cdot(-3) + (-3)\cdot 1\right)$$

$$= \left(-18 \quad -20 \quad -16\right)$$

Определение 19. Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.
Обозначается A^T или A'.

Свойства транспонированной матрицы

- Если матрица A имеет размер n×m, то транспонированная матрица A^T имеет размер m×n;
- $(A^T)^T = A$;
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Пример 12. Транспонировать матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Решение.

Сначала переписываем первую строку в первый столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 0 & & \\ -2 & & \end{pmatrix}$$

Потом переписываем вторую строку во второй столбец и третью в третий столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матрицы.

Определение 20. Элементарные преобразования матрицы — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. **Элементарными преобразованиями строк называют:**

− перестановку местами любых двух строк матрицы;

− умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;

− прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

Тоже верно и для столбцов.

Определение 21. Если матрица В получена из А с помощью элементарных преобразований, то Аи В называются эквивалентными. **Пример 13.**
Используя элементарные преобразования строк преобразовать матрицу А в треугольную.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение.

Поменяем первую и вторую строки местами

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на -4, к третей строке прибавим первую:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 + (-4) * 1 & 2 + (-4) * 3 & 0 + (-4) * 2 \\ -1 + 1 & 3 + 3 & 10 + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

Вторую строку делим на -2, третью строку делим на 6; затем меняем вторую и третью строки местами. И далее к третьей прибавим вторую, умноженную на -5:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы (детерминант) – число, характеризующее квадратную матрицу и используемое при решении систем уравнений. Определитель матрицы А обычно обозначается det(A), |A|, или Δ.

Определение 22. Определителем матрицы первого порядка называется элемент a_{11} **:** $\Delta = |A| = a_{11}$

Определение 23. Определителем матрицы второго порядка называется число, вычисленное по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 14.

Найти определитель матрицы А.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ & \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 * 1 - 7 * (-4) = 33.$$

Определение 24. Пусть дана матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка называется число, вычисленное по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Определение 25. Минором любого элемента матрицы n-го порядка называется определитель n-1 порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент. Обозначается M_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Например, $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определение 26. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы называют минор этого же элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i,j –номера соответственно строки и столбца, на пересечение которых находится элемент.
Обозначается A_{ij}.

Пример 15.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, тогда миноры: $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 5 = 19$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 35 = 13$.

Алгебраические дополнения:

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(24 - 5) = -19$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (48 - 35) = 13$

5 8 5 8

Определение 27. Определителем квадратной матрицы порядка n,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число $\Delta=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, где a_{ij}– элементы строки определителя (разложение по строке, аналогично по столбцу), A_{ik}–алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Пусть

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\Delta = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \text{ или,}$$

например,

$$\Delta = a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \text{ и т.д.}$$

Пример16. Найти определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 21 \\ 7 & 0 & -45 \end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 7 & -45 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 7 & -45 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 21 \end{vmatrix}=$$

=0+(-45-91)+0= -136.

Свойства определителя матрицы

- Определитель единичной матрицы равен единице: $|E| = 1$

- Если у матрицы есть две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю
- Если у матрицы есть две пропорциональные строки (столбца), то определитель равен нулю.
- Если у матрицы есть нулевая строка (столбец), то её определитель равен нулю.
- Если у матрицы имеются две (или несколько) линейно зависимых строк (столбцов), то определитель равен нулю.
- При транспонировании значения определителя не меняется $|A| = |A^T|$
- Если к какой-то строке определителя прибавить другую строку, умноженную на какое-либо число, то определитель матрицы не изменится. То же верно для столбцов.
- Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк (столбцов).
- Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.
- Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя.
- Определитель треугольной матрицы равен произведению его элементов, расположенных на диагонали.
- Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц.

Пример 17. Вычислить определитель 4-го порядка.

1 1 −1 | −1

2 18 − 2 | 2

3 3 18 −3 4 5 | 6 18

Решение

Определитель 4-го порядка находится по формуле:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

Где A_{ij} - это алгебраические дополнения и $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, то есть формулу можно переписать так:

$$\Delta = (-1)^{i+j} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Запишем разложение по первой строке:

$A = 1\cdot(-1)^{1+1}$ −3 +1$\cdot(-1)^{1+2}$3 | 2 − | 2 22 18 22 18 − 2 | 18 | −3

+(−1)$\cdot(-1)^{1+3}$3 3 6 | −3+(−1)$\cdot(-1)^{1+4}$3 3 18

4 6 184 5 184 5

18 −222 18 22 18 −2

18 −3− 3 18 −3− 3 3 −3+ 3 3 18

5 6 184 5 184 5 6

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}$$

$$= 18\cdot 18\cdot 18 + (-2)\cdot(-3)\cdot 5 + 3\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 18\cdot 5 - 18\cdot 6\cdot(-3) - 3\cdot(-2)\cdot 18 = 6150$$

$$= 2\cdot 18\cdot 18 + 4\cdot(-2)\cdot(-3) + 3\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 18\cdot 4 - 2\cdot 6\cdot(-3) - 3\cdot(-2)\cdot 18 = 708$$

$$= 2\cdot 3\cdot 18 + 4\cdot 18\cdot(-3) + 3\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 18\cdot 18 - 2\cdot 5\cdot(-3) = -1044$$

$$= 2\cdot 3\cdot 6 + 18\cdot 18\cdot 4 + 3\cdot 5\cdot(-2) - (-2)\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot 5\cdot 18 - 3\cdot 18\cdot 6 = 822$$

$$|A| = 6150 - 708 + 1044 + 822 = 7308$$

1.4. Обратная матрица

Определение 28. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если выполняется равенство: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Только квадратная матрица имеет обратную, причем последняя является квадратной того же порядка.

Если же определитель матрицы равен нулю, то такая матрица обратной не имеет.

Одним из способов нахождения обратной матрицы – с помощью присоединённой матрицы: справа от матрицы приписываем единичную матрицу и с помощью элементарных преобразований слева образуем единичную матрицу; справа же из единичной получаем матрицу, которая является обратной к исходной. То есть: $(A|E) \sim (E|A^{-1})$

Пример 18.

Найти обратную матрицу матрицы А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Приписываем к матрице А справа матрицу третьего порядка:

2 4 11 0 0

A/E =0 2 10 1 0~

2 1 10 0 1

Преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную.

Для этого от третьей строки отнимем первую строку.

2 4 11 0 0

0 2 10 1 0~

0 − 3 0−1 0 1

Третью строку поделим на (-3) и поменяем местами со второй строкой.

~ 2 4 11 0 02 4 11 0 0

−1/3 0 2 10 1 00 1 01/3 0

0 1 01/3 0 −1/30 2 10 1 0

Отнимем от первой строки вторую умноженную на 4; от третьей строки вторую умноженную на 2:

2 − 4□04 − 4□11− 4□0 1− 4□(1/ 3) 0 − 4□0 0 − 4□(−1/3)

0 1 0 1/3 0 −1/ 3~

0 − 2□02 − 2□11− 2□0 0 − 2□(1/ 3) 1− 2□0 0 − 2□(−1/3)

2 0 1−1/ 3 0 4/ 3

0 1 01/ 3 0~ −1/ 3

0 0 1− 2 / 3 1 2/ 3

Отнимем от первой строки третью строку:

2 0 01/3 −1 2/3

0 1 01/3 0 ~ −1/3

0 0 1− 2/3 1 2/3

Разделим первую на 2:

1 0 01/ 6 −1/ 2 1/ 3

0 1 01/3 −1/ 3 0

0 0 1− 2/ 3 2 / 3 1

□ 1/ 6 −1/ 2 1/ 3 □

A^{-1} = □□ 1/ 3 0 −1/3□□.

□□− 2/3 1 2/ 3 □□

Определение 29. Если матрица $\tilde{A}$ составлена из элементов, которые равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов матрицы A, то она называется союзной (присоединённой) матрицей.

Определение 30. Матрица Ã, элементы которой равны [алгебраическим дополнениям](#) соответствующих элементов матрицы А называется союзной (присоединённой) матрицей.

Второй способ нахождения обратной матрицы следующий:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если он не равен нулю, то обратная матрица существует. Если же определитель равен нулю, то матрица вырожденная и обратная матрица не существует.
2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы и составляем из них присоединённую матрицу $\tilde{A}$.
3. Находим матрицу, транспонированную к $\tilde{A}$.
4. Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, с помощью соотношения

Пример 19. Найти обратную матрицу матрицы А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 6$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2*1-1*1=1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0*1-1*2) = 2; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0*1-2*2 = -4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4*1-1*1) = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2*1-1*2 = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2*1-4*2) = 6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \ (1)$$

Запишем союзную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 2 & \frac{1}{6}\cdot 4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1 & \frac{1}{6}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 (−2) 2

2+ 2 4+1 2+ 1 1+1 1+ 1

3 3 3 3 3 3

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

ВАРИАНТ 1

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot A$ и выяснить, являются ли строки матрицы С линейно зависимыми.

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 - 4x_4 = 9, \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 21. \end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5.Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B' + 2E$ и выяснить, имеет ли она обратную.

2. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Выяснить, является ли совместной система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + 16x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3

1. Решить матричное уравнение

$$BX + 2X = B^{T},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B^{T}$ и определить ее ранг.

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = 7, \\ x_1 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \rightarrow (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x-y+z=6 \\ x+5y=-3 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 5

1.Решить матричное уравнение

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.По формулам Крамерарешить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 14x + 4y + 6z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 6

1.Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = B^{\top} A^{\top}$ и выяснить, имеет ли она обратную.

2.Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Выяснить, является ли совместной система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 5x_5 = 2, \\ -4x_2 - 10x_3 - x_4 - 9x_5 = -1, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$-6x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 14$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5$$

ВАРИАНТ 7

1. Решить матричное уравнение

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \quad 0 \; 1 \; 0 \; 2. \quad 1 \; 0 \; 1 \; 3 \; 1 \quad 1 \; 2$$

2. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 14x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 30x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1$$

$x_1 - 4x_2 = -5$

ВАРИАНТ 8

1.Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$ и определить ее ранг.

2.Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + 16x_2 + 2x_3 = 4 \\ 9x_1 - 6x_2 + 18x_3 = -21 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 9

1. Решить матричное уравнение

$$X \cdot A = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

2. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 17x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 10

1. При каких значениях λ ранг матрицы

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ & -2 & \\ & & -6 \\ 1 & & 15 \end{matrix}$$

равен двум?

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

$2x_3 = 5,$

$x_1 - x_2 - 3x_3 = -3.$

$2x_1 + 2x_2 +$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$2x_1 - 3x_2 - - 9x_4 = -7,$

$x_3 \; 3x_1 + 2x_2 - 7x_4 = -17,$

$- 8x_3 - x_4$

$- 5x_4 = -7,$

$= -27.$

${}_1 + 2x_2 -$

$4x_3 \, x$

$4x_1 + 7x_2 - 15x_3$

Найти одно из ее базисных решений.

4. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

воспользовавшись схемой $(A/E) \to (E/A^{-1})$

5.Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$