Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Департамент Анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок,
И.М. Эйсымонт

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Часть 2

Учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика»
заочная и заочная ускоренная формы обучения

Утверждено на заседании Совета департамента
анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол №2 от 16 октября 2018 г.)

Москва 2018

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.172я73

П64

Рецензент: **Л.Р. Борисова, к.ф.-м.н., доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий.**

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок, И.М. Эйсымонт. Анализ данных. Часть 2. Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика», заочная и заочная ускоренная формы обучения. – М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2018, 59 с.

В пособии приведены варианты расчетно-аналитической работы (с методическими указаниями по их выполнению), вопросы к экзамену, примеры типовых задач с решениями, примеры тестовых заданий для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по заочной и заочной ускоренной формам обучения по направлениям «Экономика».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.172я73

Учебное издание

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок, И.М. Эйсымонт

Анализ данных. Часть 2

Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика», заочная и заочная ускоренная формы обучения.

Компьютерный набор, верстка: ***И.М. Эйсымонт***

Формат 60х90/16. ГарнитураTimes New Roman
Усл.п.л. 3,7.

Оглавление

1. Введение 3
2. Варианты расчетно-аналитической работы 3
3. Примеры решения типовых задач 37
4. Экзаменационные вопросы 49
5. Образцы экзаменационных билетов 53
6. Таблица значений функции Гаусса 54
7. Таблица значений функции Лапласа 55
8. Таблица значений функции Пуассона 56
9. Литература 57

Введение

Основное содержание дисциплины «Анализ данных» для бакалавров направлений «экономика» и требования, предъявляемые образовательными стандартами к результатам освоения дисциплины, изложены в рабочей программе учебной дисциплины. Дисциплина изучается во втором и третьем семестрах при ускоренной форме обучения и в третьем и четвертом семестрах при заочной форме обучения. Настоящее пособие «Анализ данных. Часть 2» разработано по материалу третьего и четвертого семестров.

В пособии приведем перечень вопросов к экзамену, который поможет студентам систематизировать полученные знания и подготовиться к сдаче экзамена, варианты расчетно-аналитической работы, решения типовых задач и необходимые таблицы, а так же список рекомендованной литературы.

Варианты расчетно-аналитической работы

ВАРИАНТ 1

(*для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1*)

1. В отделении Сбербанка микрорайона пользуются банкоматом 20% населения из близлежащих домов. Какова вероятность того, что из 500 наудачу выбранных жителей микрорайона в этом отделении Сбербанка пользуются банкоматом:

а) 90 человек;

б) от 80 до 130 человек;

б) более 120 человек?

2. По наблюдениям за температурой воздуха в сентябре этого года в данной местности установлено, что средняя температура воздуха составила 15ºС, а среднее квадратическое отклонение равно 5ºС. Оценить вероятность того, что в сентябре следующего года средняя температура воздуха будет:

а) не более 25ºС;

б) более 20ºС.

в) будет отличаться от средней температуры этого года не более чем на 7ºС (по абсолютной величине);

г) будет отличаться от средней температуры этого года не менее чем на 8ºС (по абсолютной величине);

3. Известно, что месячная доходность некоторой ценной бумаги есть нормально распределенная случайная величина ξ (%). Найти ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, если известно, что $P(\xi < 1) = 0{,}1$ и $P(\xi \geq 5) = 0{,}5$.

Построить схематично[1] графики функции распределения и функции плотности распределения этой случайной величины.

Вычислить вероятность того, что в следующем месяце доходность ценной бумаги будет:

а) не более 4%;

б) не менее 8%;

в) от 3% до 7%.

4. С целью изучения миграции населения в данной области было проведено выборочное обследование 70 мелких населенных пунктов из 350 имеющихся в области (выборка бесповторная). Получены следующие данные о количестве зарегистрированных мигрантов:

9	0	8	3	10	5	14	6	14	1
3	4	10	5	4	11	4	14	13	13
12	2	1	3	9	14	0	10	5	7
3	11	6	3	14	7	2	2	6	10
8	5	9	14	7	7	0	3	11	7
12	13	2	13	5	14	6	13	3	1
6	8	9	7	5	13	13	7	1	12

[1] Для построения графиков можно использовать Microsoft Excel.

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что среднее количество мигрантов во всей области отличается от их среднего количества в выборке не более чем на 1 чел;

б) границы, в которых с вероятностью 0,98 заключена доля всех населенных пунктов области, где количество мигрантов превышает 8 человек.

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего количества мигрантов, что и в п. а) можно гарантировать с вероятностью 0,95.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – число мигрантов в данном населенном пункте – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. С целью изучения зависимости количества времени использования клиентом мобильной связи в течение месяца ξ (мин) и стоимости минуты разговора η (руб.) произведено обследование 100 абонентов, пользующихся различными тарифными планами, и получены следующие данные:

ξ \ η	Менее 1	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	Более 3	Итого:
Менее 200				3	9	3	15
200-400				5	8	7	20
400-600			4	13	9	3	29
600-800		2	6	8	2		18
Более 800	6	5	6	1			18
Итого:	6	7	16	30	28	13	100

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить время использования мобильной связи при стоимости минуты разговора 2,25 руб.

ВАРИАНТ 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

1. Вероятность сдачи студентом контрольной работы в срок равна 0,8. Найти вероятность того, что из 150 студентов вовремя сдадут контрольную работу:

а) 110 студентов;

б) не менее половины студентов;

в) не менее 100, но не более 130 студентов.

2. Всхожесть хранящегося на складе зерна в среднем составляет 80%, а среднее квадратическое отклонение 6%. Оценить вероятность того, что в выбранной партии зерна всхожесть:

а) составит не менее 85%;

б) составит не более 90%;

в) будет отличаться от средней не более чем на 8%;

г) будет отличаться от средней не менее чем на 10%.

3. Случайная величина ξ имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2. Найти параметр σ, если известно, что $M(\xi)=5$ и $P(2<\xi<8)=0{,}9973$. Вычислить вероятность того, что значение случайной величины ξ окажется меньше 0.

Построить схематично[2] графики функции распределения и функции плотности распределения этой случайной величины.

4. С целью изучения размера потребительских кредитов, выданных банком в одном из крупных магазинов электронной техники в течение последнего месяца, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 180 кредитов из 2500 выданных. Величины сумм выданных кредитов (тыс. руб.) представлены в таблице:

22,9	26,6	18,0	25,2	28,9	30,3	21,1	13,5	15,7	22,2
18,6	28,8	11,5	26,7	31,6	14,1	26,7	22,2	19,9	23,4
16,0	17,9	17,0	20,3	10,5	26,8	13,9	18,1	19,6	12,7
20,7	17,8	19,5	24,4	21,8	23,3	18,6	24,1	19,6	20,8
15,8	14,0	20,5	18,2	17,8	20,7	21,9	28,0	17,5	11,2
12,2	24,7	14,9	19,3	23,6	22,3	20,1	19,1	21,9	25,2
22,2	18,0	16,3	18,3	18,6	13,5	28,0	15,2	22,1	24,7
20,1	14,0	17,3	17,6	18,9	22,4	20,9	15,1	11,9	21,8
23,4	18,2	21,0	22,7	23,2	19,9	26,1	21,3	21,2	16,1
27,6	17,5	18,1	13,0	23,9	11,2	22,5	19,5	19,2	24,2

[2] Для построения графиков можно использовать Microsoft Excel.

29,7	22,7	12,7	26,4	16,8	14,7	21,3	18,5	22,3	15,3
14,0	23,1	25,8	27,9	17,5	24,9	25,6	32,4	17,9	19,7
11,9	17,6	15,0	19,0	22,1	14,0	27,5	18,6	19,5	25,5
19,5	25,3	27,9	24,9	15,5	13,8	24,2	23,8	25,8	18,9
8,3	24,6	18,7	24,2	16,3	18,9	22,4	15,6	25,6	16,6
19,6	20,0	20,2	9,9	22,0	19,2	14,5	12,6	13,0	20,1
22,7	20,7	20,2	12,9	21,1	19,0	20,2	28,0	20,2	21,8
14,8	17,3	17,4	14,1	13,8	19,2	17,0	22,0	17,1	17,2

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что средняя величина всех выданных в течение месяца кредитов отличается от полученной по выборке не более чем на 250 руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля всех выданных кредитов, сумма которых не превышает 20 тыс. руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором границы для доли кредитов, полученные в п. б) можно гарантировать с вероятностью 0,98.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – величина выданных кредитов – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. В таблице приведено распределение 120 коров по дневному надою ξ (кг) и жирности молока η (%):

η \ ξ	Менее 7	7 -10	10 - 13	13 – 16	Более 16	Итого:
Менее 3,2				8		8
3,2 – 3,6			2	16	8	26
3,6 – 4,0		4	16	10	2	32
4,0 – 4,4	2	6	10	2		20
Более 4,4	8	6	20			34
Итого:	10	16	48	36	10	120

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$ и построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать содержательную интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции, на уровне значимости α = 0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний процент жирности молока для коров, дневной удой которых составляет 15 кг.

ВАРИАНТ 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

1. После окончания занятий в среднем каждый десятый студент занимается в читальном зале.

Найти вероятность того, что из 300 студентов будут заниматься в читальном зале:

а) 20 студентов;

б) не менее 15, но не более 30 студентов;

в) сколько посадочных мест нужно иметь, чтобы с вероятностью 0,9545 их хватало всем желающим заниматься в читальном зале студентам.

2. Уровень воды в реке – это случайная величина со средним значением 2,5 м и стандартным отклонением 20 см. Оценить вероятность того, что в наудачу выбранный день:

а) уровень превысит 3 м;

б) уровень не превысит 275 см;

в) будет отличаться от среднего уровня более чем на 40 см;

г) окажется в пределах от 2м 20см до 2м 80см.

3. Известно, что время непрерывной работы электрической лампы есть случайная величина ξ (час), имеющая показательный закон распределения. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины, если известно, что вероятность непрерывной работы лампы не менее 800 час составляет 0,2.

Построить схематично[3] графики функции распределения и функции плотности распределения этой случайной величины.

Вычислить вероятность того, что выбранная случайным образом лампа непрерывно проработает:

а) не более 600 час;

б) не менее 700 час;

[3] Для построения графиков можно использовать Microsoft Excel.

в) от 30 до 40 суток.

4. С целью определения средней суммы вкладов на 1 января текущего года в сберегательном банке, имеющем 2000 вкладчиков, по схеме собственно-случайной выборки с бесповторным отбором членов проведено обследование 200 лицевых счетов. Распределение вкладов по их величине (тыс. руб.) представлено в таблице:

612	442	498	284	667	563	709	388	518	717
218	600	605	131	547	517	448	818	732	842
501	385	238	682	400	498	305	610	463	618
537	453	546	723	190	608	607	620	117	705
562	212	520	414	316	408	405	355	457	569
367	429	254	568	413	572	423	755	154	588
594	473	340	335	566	402	401	502	756	558
792	565	474	526	502	408	674	828	483	465
596	670	502	601	452	523	741	261	327	556
541	496	141	274	394	555	409	511	644	560
549	763	739	455	475	287	522	743	535	630
494	562	488	562	656	559	540	592	591	348
498	495	457	644	379	877	398	272	363	597
231	539	667	583	369	492	559	662	239	532
574	568	621	663	223	714	649	476	619	428
494	567	536	359	502	511	389	621	573	305
520	561	634	609	563	359	343	702	489	136
725	495	507	627	775	489	419	430	598	511
661	593	386	643	182	366	611	464	665	427
389	779	761	644	607	536	706	694	462	354

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что средняя величина вклада в банке отличается от полученной по выборке не более чем на 500 руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля всех вкладов, сумма которых составляет не менее 500 тыс. руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором границы для генеральной средней величины вклада из п. а) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – величина вклада – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 100 средних фермерских хозяйств по числу наемных рабочих ξ (чел.) и их средней месячной заработной плате на 1 человека η (тыс. руб.) представлено в таблице:

ξ / η	2–4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	Итого:

20–25			6	8	4	18
25–30		2	10	2	2	16
30–35	2	6	8	2		18
35–40	4	12	10	2		28
40–45	10	6	4			20
Итого:	16	26	38	14	6	100

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$ и построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить среднюю месячную заработную плату одного рабочего в хозяйстве, в котором работают 7 наемных рабочих.

ВАРИАНТ 4

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)

1. В городе в среднем 10% заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных пар, заключивших брак, в течение года не разведутся:

а) 350 пар;

б) не менее 400 пар.

С вероятностью 0,95 установить, какое максимальное число разводов можно ожидать для 400 пар.

2. Вероятность того, что желание, загаданное на Новый год, сбудется, равна 0,7. Оценить вероятность того, что из 200 загаданных желаний сбудется:

а) ровно 140 желаний;

б) от 120 до 150 желаний;

в) оценить, сколько желаний надо загадать, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95, исполнилось бы не менее 40% желаний.

3. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ ax & \text{при} \quad 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр распределения a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$;

г) вероятность $P(0 < \xi < 1)$.

Построить графики функций $\varphi(x)$ и $F(x)$.

4. С целью определения средней величины транспортных затрат (тыс. руб.) на доставку одной тонны продукции предприятий пищевой промышленности к потребителям в некотором крупном мегаполисе, имеющем 2570 предприятий, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено обследование 240 предприятий. Распределение транспортных затрат (тыс. руб.) представлено в таблице:

10,3	8,8	6,8	14,0	8,8	13,2	8,2	9,5	9,9	14,0
13,2	14,4	11,7	10,7	6,8	11,5	10,8	8,2	8,2	6,2
5,3	11,7	4,0	6,2	13,6	18,1	7,6	10,7	13,0	14,8
10,0	11,2	6,2	9,3	11,6	6,6	10,1	6,5	9,1	11,9
10,2	9,7	11,0	4,3	8,6	12,9	15,9	9,7	12,7	6,0
9,6	14,0	7,9	10,6	8,8	11,9	15,6	8,3	6,8	3,4

5,1	11,5	12,8	12,6	9,8	12,0	7,7	6,7	9,6	11,8
10,5	10,7	10,3	6,8	13,0	7,5	9,1	11,0	8,0	10,0
9,5	4,6	6,6	9,5	10,2	9,5	14,7	16,3	17,8	9,5
10,0	7,6	11,9	10,6	3,8	10,9	7,9	14,4	8,0	9,7
12,6	14,4	8,2	13,9	6,2	9,9	7,1	12,1	7,6	9,0
6,4	10,9	8,4	13,5	8,3	4,5	5,9	15,6	13,7	12,6
8,4	11,3	12,8	12,8	7,7	14,0	8,9	9,7	9,8	14,1
7,0	8,2	8,4	13,9	7,9	11,7	8,5	9,7	2,6	11,5
6,6	8,4	0,6	12,2	12,1	12,4	11,3	11,7	6,5	12,9
10,6	8,8	12,0	11,0	9,4	7,0	13,0	14,4	9,3	13,6
12,7	5,7	5,8	9,5	11,0	11,8	9,9	7,9	12,4	9,0
10,6	10,9	9,8	10,9	10,9	5,7	11,6	8,7	12,5	7,0
13,6	10,3	11,1	13,5	12,0	9,1	9,3	7,3	15,3	12,1
3,7	10,7	9,4	7,4	14,5	9,5	10,5	9,1	8,5	12,8
11,8	1,9	13,4	12,9	11,2	9,4	15,0	12,7	10,5	10,0
16,1	11,5	11,1	10,4	4,8	13,0	7,7	9,0	11,1	10,0
17,0	9,6	8,7	9,4	15,6	9,6	9,3	9,4	13,9	12,1
8,2	2,0	12,5	10,0	11,2	8,2	5,8	11,3	8,2	9,4

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что средняя величина транспортных затрат предприятия отличается от полученной по выборке не более чем на 200 руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,98 заключена доля всех предприятий, транспортные затраты которых составляют не менее 10 тыс. руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором границы для доли всех предприятий, полученные в п. б) можно гарантировать с вероятностью 0,95.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – величина транспортных затрат – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 60 предприятий по затратам рабочего времени ξ (тыс. чел. дней) и выпуску продукции η (млн. руб.) представлено в таблице:

ξ / η	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	Итого:
10–25	1	3	2			6
25–40	3	6	4	1		14
40–55		3	7	6	1	17
55–70		1	6	4	4	15
70–85			2	5	1	8
Итого:	4	13	21	16	6	60

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$ и построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости $\alpha = 0,05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний выпуск продукции предприятия с затратами рабочего времени 55 тыс. чел. дней.

ВАРИАНТ 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

1. Вероятность того, что желание, загаданное на Новый год, сбудется, равна 0,7. Найти вероятность того, что из 100 загаданных желаний сбудется:

а) ровно 75 желаний;

б) от 60 до 85 желаний;

в) не менее половины желаний.

2. Дневная выручка магазина шаговой доступности является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением 25000 руб. и средним квадратическим отклонением 3000 руб.

1) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что дневная выручка магазина шаговой доступности будет находиться в пределах от 22000 до 28000 руб.

2) Ту же вероятность найти, используя связь нормального закона распределения с функцией Лапласа.

3. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2, \\ a(x-2) & \text{при} \quad 2<x\le 2{,}5, \\ 1 & \text{при} \quad x>2{,}5. \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a;

2) плотность вероятности $\varphi(x)$;

3) математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$.

Построить графики функций $\varphi(x)$ и$F(x)$

4. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование строительных организаций региона по недельному объему выполненных строительных работ (тыс. руб.). Предполагая, что в регионе функционируют 1300 строительных организаций, получены следующие данные:

748	449	713	602	775	661	1047	676	1008	488
612	641	761	660	642	794	636	924	859	866
839	573	510	597	735	1035	435	759	645	695
597	795	671	596	922	694	556	572	668	776
729	656	738	941	702	707	479	610	783	698
824	877	572	887	649	984	668	857	616	498
682	716	749	706	667	865	896	697	519	841
838	838	711	609	740	433	714	940	848	561
609	837	715	766	451	603	639	673	613	821
784	665	534	751	580	748	753	629	686	724
728	643	701	617	687	540	834	867	804	756
610	712	828	779	739	686	556	824	755	650
833	882	521	509	849	870	825	891	749	853

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен средний объем выполненных работ всех строительных организации региона;

б) вероятность того, что доля всех строительных организаций, объем работ которых не менее 600 тыс. руб., отличается от доли таких организаций в выборке не более чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего объема выполненных работ, (см. п. а)), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α =0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – величина транспортных затрат – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 50 городов по численности населения ξ (тыс. чел.) и среднемесячному доходу на одного человека η (тыс. руб.) представлено в таблице:

$\eta \backslash \xi$	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	Более 8	Итого:
30–50	1	1	3				5
50–70		2	5	1			8
70–90		1	1	6	2	2	12
90–110			4	9			13

110–130			2	2	5		9
Более 130					2	1	3
Итого:	1	4	15	18	9	3	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний доход на одного человека в городе с населением 100 тыс. человек.

ВАРИАНТ 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

1. На почту поступило 8000 писем. Вероятность того, что на случайно взятом конверте отсутствует почтовый индекс, равна 0,0005. Найти вероятность того, что почтовый индекс отсутствует: а) на трех конвертах; б) не менее чем на трех конвертах.

2. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Было произведено 600 выстрелов. Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9949 будет заключено число попаданий в цель;

б) число выстрелов, которые надо произвести по мишени, чтобы с вероятностью 0,9949 ожидать, что отклонение относительной частоты от вероятности попадания при одном выстреле будет по модулю меньше 0,05.

3. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания этой случайной величины в интервале от –2 до 2 равна 0,5705. Найти среднее квадратическое отклонение и плотность распределения этой случайной величины. Вычислить вероятность того, что случайная величина будет принимать значения:

а) меньшее 3;

б) большие 4;

в) отличаться от своего математического ожидания не более чем на 3,5 (по абсолютной величине).

4. С целью определения средней величины месячной заработанной платы работников торговой сферы в некотором крупном районе города, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 150 работников из 1300. Распределение месячной заработной платы (тыс. руб.) представлено в таблице:

18,3	23,3	20,2	29,9	33,5	22,2	17,3	23,7	21,7	21,3
29,8	25,9	28,7	32,1	25,4	24,8	31,8	24,8	19,0	27,0
18,1	21,8	20,9	21,4	19,8	36,6	32,6	20,5	28,6	31,4
30,1	31,2	31,7	23,2	25,3	22,3	11,1	36,8	25,1	27,2
25,5	34,0	4,7	18,7	30,2	26,4	20,3	13,3	20,1	22,6
33,0	29,8	24,8	27,7	30,7	34,3	20,7	34,0	18,6	34,5
28,6	32,2	21,7	28,8	33,2	30,6	22,4	29,7	33,6	22,3
22,5	16,3	28,2	21,4	30,6	33,4	20,9	24,2	29,7	43,1
16,0	18,3	22,1	25,7	21,4	16,7	24,3	17,0	35,8	23,7
17,7	27,4	21,7	25,9	29,8	29,7	33,6	12,0	7,0	23,6
20,0	37,6	41,7	29,7	29,9	25,8	29,4	26,9	15,8	27,2

32,6	26,9	15,3	21,9	21,9	23,7	20,5	25,5	22,5	22,3
30,7	21,9	23,1	31,6	18,8	35,3	21,8	20,6	24,3	25,6
11,4	35,4	30,1	22,7	25,3	32,4	28,3	21,7	24,7	25,6
27,9	18,8	32,6	18,7	27,7	26,3	34,2	23,7	25,0	30,2

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,977 будет заключена средняя месячная заработанная плата всех работников торговой сферы города;

б) вероятность того, что доля всех работников торговой сферы города, месячная заработанная плата которых превышает 30 тыс. руб., отличается от доли, полученной по выборке, не более чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для средней месячной заработанной платы всех работников торговой сферы города, полученные в п. а), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – месячная заработанная плата работников торговой сферы города – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Имеются следующие выборочные данные о рыночной стоимости квартир η (тыс. у.е.) и их общей площади ξ (кв. м):

ξ \ η	13–18	18–23	23–28	28–33	33–38	Итого:
33–49	4	2	1			7
49–65	2	6	4	1		13
65–81	1	4	9	4	1	19
81–97			3	6	3	12
97–113			1	3	5	9
Итого:	7	12	18	14	9	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить стоимость квартиры общей площадью 75 кв. м.

ВАРИАНТ 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

1. При установившемся технологическом процессе в день в среднем происходит 10 обрывов нити на 100 веретенах. Определить вероятность того, что на 800 веретенах произойдет:

а) ровно 78 обрывов нити;

б) обрыв нити произойдет не более чем на 100 веретенах.

2. В течение дня в банк приходят в среднем 150 клиентов, из которых каждый десятый приходит в банк для того, чтобы снять проценты с вклада. Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ – числа клиентов, пришедших в банк снять проценты – равно 5. Оценить вероятность того, что сегодня число клиентов банка, пришедших снять проценты, будет:

а) не более 20;

б) более 25.

в) будет отличаться от среднего числа не более чем на 7 (по абсолютной величине).

3. Диаметр выпускаемой детали является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием a=5 см и средним квадратическим отклонением σ=0,02 см. Вычислить вероятность того, что размеры случайно выбранной детали будут:

а) заключены в границах от 4,975 см до 5,015 см;

б) отличаться от своего математического ожидания не более чем на 0,015 (по абсолютной величине).

Найти вероятность того, что из двух проверенных деталей, диаметр хотя бы одной отклоняется от математического ожидания не более, чем на 0,03 см (по абсолютной величине).

4. В некотором городе по схеме собственно случайной бесповторной выборки было обследовано 180 магазинов розничной торговли из 2500 с целью изучения месячного объема розничного товарооборота. Распределение месячного объема розничного товарооборота (тыс. руб.) представлено в таблице:

284	492	443	351	698	423	403	418	881	485
697	693	656	679	517	513	458	554	303	555
362	610	576	501	622	658	341	517	715	436
307	465	458	301	474	478	583	434	573	837
468	430	207	371	582	846	514	562	569	714
453	564	581	624	539	427	372	609	316	427
435	662	537	589	795	683	747	469	455	709
766	527	688	639	614	717	405	780	858	328
593	513	624	715	536	508	277	502	427	816
650	595	701	491	207	541	609	430	630	558
492	550	552	550	726	583	367	403	410	627
387	395	675	602	606	476	253	534	466	448
513	528	456	726	520	599	769	528	492	499
719	541	654	368	625	344	636	452	429	405
615	547	292	590	383	505	585	325	519	624
494	530	231	404	633	719	477	454	508	515
540	363	409	565	542	489	273	509	543	669
403	707	305	589	734	576	553	466	332	632

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,96 будет заключен средний месячный товарооборот всех торговых предприятий города;

б) вероятность того, что доля всех торговых предприятий города, месячный товарооборот которых не превышает 500 тыс. руб., отличается от доли предприятий, полученной по выборке не более, чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего месячного товарооборота всех торговых предприятий города, полученные в п. а), можно гарантировать с вероятностью 0,98.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – месячный товарооборот торговых предприятий города – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, на котором изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 60 предприятий по затратам рабочего времени ξ (тыс. человеко-дней (чел. дней)) и выпуску продукции ζ (млн. руб.) представлены в таблице:

x \ y	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	Итого:
10–25	1	3	2			6
25–40	3	6	4	1		14
40–55		3	7	6	1	17
55–70		1	6	4	4	15
70–85			2	5	1	8
Итого:	4	13	21	16	6	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ζ и ζ существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии и построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии, дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α = 0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний выпуск продукции предприятия, с затратами рабочего времени 55 тыс. чел. дней.

ВАРИАНТ 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

1. Вероятность сбоя при получении денег в банкомате равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 обращений, банкомат правильно сработает:

а) не менее 4995 раз;

б) не более 4997 раз.

2. В осветительную сеть участка автодороги было включено 400 новых электроламп. Каждая электролампа в течение года может перегореть с вероятностью 0,05. Оценить вероятность того, что в течение года из числа включенных в начале года электроламп придется заменить новыми:

а) не менее 25 ламп;

б) не более 30 ламп.

3. По данным страховых компаний некоторой страны известно, что продолжительность жизни человека есть случайная величина ξ (лет), имеющая показательный закон распределения. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины, если известно, что человек доживает до 75 лет с вероятность 0,2.

Построить схематично[4] графики функции распределения и функции плотности распределения этой случайной величины.

Вычислить вероятность того, что выбранный случайным образом новорожденный человек проживет:

а) не более 60 лет;

б) не менее 70 лет;

в) от 50 до 80 лет.

Какова вероятность прожить до 70 лет клиенту страховой компании, если ему сейчас 50 лет?

4. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование предприятий одной из отраслей экономики в отчетном году с целью определения объемов выпускаемой продукции (млн. руб.). Полученные данные представлены в таблице:

62,27	91,63	76,17	125,15	42,73	105,08	65,02	66,47	67,26	52,10
67,06	90,19	72,84	70,35	79,33	90,38	103,07	76,29	78,36	110,46
65,95	65,57	105,32	72,88	119,00	83,08	90,25	83,81	89,44	100,10
68,29	87,11	94,39	87,07	61,58	99,45	65,80	96,49	88,31	76,69
83,71	83,26	80,45	123,17	112,47	77,30	85,70	59,56	100,16	44,91
81,67	88,36	73,38	90,02	90,39	71,57	65,76	64,00	73,39	97,65
94,91	77,13	49,69	106,97	104,18	116,68	82,85	66,51	76,05	91,90
58,69	50,57	93,06	99,49	70,32	101,71	38,48	74,66	79,18	95,35
51,40	81,50	112,34	75,40	66,08	79,88	91,13	105,40	52,35	54,91
72,82	121,39	76,50	65,34	85,48	111,86	86,49	92,90	90,61	47,63
73,59	82,48	70,72	78,27	54,38	59,64	58,26	61,87	66,55	73,85
90,17	46,01	75,57	86,93	93,05	70,86	88,77	78,66	91,89	109,49

[4] Для построения графиков можно использовать Microsoft Excel.

54,92	90,78	80,91	94,76	100,73	103,59	58,59	68,79	84,46	75,01
82,00	91,53	108,37	46,04	56,89	52,17	80,26	62,50	65,05	78,10
72,36	81,25	56,34	83,97	64,52	80,06	92,67	63,82	79,50	72,07
97,30	78,66	76,42	103,88	79,08	81,01	66,76	117,25	61,88	87,49

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что средняя величина объема выпускаемой продукции в отрасли отличается от полученной по выборке не более чем на 200 тыс. руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,96 заключена доля всех предприятий отрасли, объем выпускаемой продукции которых составляет не менее 60 млн. руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для генеральной средней объема выпускаемой продукции из п. а) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – объем выпускаемой продукции в отрасли – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 50 однотипных предприятий по величине заработанной платы ξ (тыс. руб.) на них и текучести кадров η (число уволившихся за год сотрудников) представлено в таблице:

ξ \ η	Менее 10	10–15	15–20	20–25	25–30	Более 30	Итого
20–35				1	2	2	5
35–50			2	3	2	1	8
50–65	1	3	2	3	1		10
65–80	2	4	4	2	1		13
80–95	1	4	2	1			8
95-110	2	2	1	1			6
Итого	6	13	11	11	6	3	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить какую заработанную плату имели уволившиеся сотрудники, если их число составило 17 человек.

ВАРИАНТ 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

1. По статистическим данным в городе 14% пенсионеров, среди которых каждый двухсотый верит «некачественной» рекламе. Какова вероятность того, что хотя бы два пенсионера поверят такой рекламе, если в городе население составляет 10000 человек?

2. Сумма вклада клиента сберегательного банка – это случайная величина, распределенная по биномиальному закону с математическим ожиданием 15 тыс. руб. и дисперсией 0,4.

1) Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что сумма вклада наудачу взятого вкладчика будет заключена в границах от 14 тыс. руб. до 16 тыс. руб.

2) Найти ту же вероятность, используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

3. Случайная величина ξ имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2. Найти параметры, если известно, что $P(\xi < 1) = 0{,}5$ и $P(-2 < \xi < 4) = 0{,}9973$. Вычислить вероятность того, что значение случайной величины X окажется меньше 2.

4. С целью изучения роста производительности труда на предприятиях молочной промышленности по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было обследовано 160 предприятий из 1500. Данные о величине роста производительности труда (%) представлены в таблице:

113,1	100,4	110,9	104,2	114,7	107,5	120	108,4	119,9	100,8
104,6	106,2	113,9	107,4	106,3	115,6	106	119,4	118,2	118,3
117,5	102,9	101,1	103,9	112,3	119,9	100,3	113,7	106,4	109,7
103,9	115,7	108,1	103,9	119,4	109,6	102,3	102,9	107,9	114,7
111,9	107,2	112,5	119,6	110,1	110,5	100,7	104,5	115,1	109,9
117	118,6	102,9	118,8	106,7	119,8	107,9	118,1	104,8	100,9
108,8	111	113,2	110,4	107,8	118,3	119	109,8	101,3	117,6

117,5	117,5	110,8	104,5	112,6	100,3	110,9	119,5	117,8	102,5
104,5	117,5	111	114,2	100,4	104,2	106,1	108,2	104,7	116,9
115,2	107,7	101,7	113,3	103,2	113,1	113,4	105,6	109,1	111,6
119,1	108,3	101,3	102,4	111,9	109,6	114,5	102,3	106,4	116,7
119,3	106,3	107,6	113,6	112	101,8	108,7	106,4	118,7	113,5
108,9	112,8	114,5	112,4	112,6	102,7	107,8	105,7	105,2	116,6
113,4	114,1	109,7	106,1	108,4	111,4	114,6	110,7	109	105,9
111,2	106,5	114,3	109,3	106,6	106,3	111,3	119,1	112	102,7
112,2	115,5	103,1	111,7	110,5	114,5	113,1	110	108,3	108,5

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что доля предприятий молочной промышленности, производительность труда на которых составляет не менее 105%, отличается от полученной по выборке не более чем на 5%;

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена средняя производительность труда на всех предприятий молочной промышленности;

в) объем бесповторной выборки, при котором границы производительность труда на всех предприятий молочной промышленности, полученные в п. б) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

5. Заменив неизвестные параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными оценками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – производительность труда на предприятий молочной промышленности – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, где изображена гистограмма эмпирического распределения, соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 110 предприятий по стоимости основных производственных фондов ξ (млн. руб.) и стоимости произведенной продукции η (млн. руб.) представлены в таблице:

ξ \ η	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	Итого:
5–15	17	4					21
15–25	3	18	3				24
25–35		2	15	5			22
35–45			3	13	7		23
45–55					6	14	20
Итого:	20	24	21	18	13	14	110

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить среднюю стоимость произведенной продукции, при стоимости основных производственных фондов 45 млн. руб.

ВАРИАНТ 10

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)

1. Человек, проходящий мимо киоска, покупает газету с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что среди 400 человек, прошедших мимо киоска в течение часа:

а) купят газету 90 человек;

б) не купят газету от 300 до 340 человек (включительно).

2. В среднем, 20% кустов смородины плодоносят 10 лет. При этом среднее квадратическое отклонение составляет 2,5 года. Оценить вероятность того, что выбранный куст смородины будет плодоносить:

а) менее 12 лет;

б) более 8 лет;

в) от 7 до 13 лет.

3. Установлено, что время ремонта холодильника в мастерской есть случайная величина ξ, распределенная по показательному закону. Среднее время ремонта составляет 10 часов. Определить, что на ремонт поступившего в мастерскую холодильник потребуется:

а) не более 15 часов

б) от 7 до 12 часов.

4. На одном из участков шоссе было проведено измерение скорости движения автомобилей (в км/ч). Известно, что в течении суток по данному участку проезжает в среднем 2570 автомобилей. Выборочное измерение скорости 120 автомобилей показало следующие результаты:

58	54	61	66	66	69	49	59	65	55
57	52	51	55	56	49	57	58	61	58

58	58	67	60	59	57	70	64	72	57
68	52	63	65	70	60	57	63	58	64
53	56	52	58	60	60	58	71	51	56
47	67	54	57	64	62	64	63	53	54
63	62	55	59	61	63	61	55	69	62
60	64	64	57	55	66	54	52	64	63
71	67	67	61	60	62	60	55	51	64
65	74	74	51	45	59	71	47	53	46
69	70	47	53	55	50	65	51	49	75
64	52	64	55	73	51	53	71	72	48

Составить интервальный вариационный ряд. Записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график. На одном чертеже изобразить гистограмму и полигон частот.

По сгруппированным данным вычислить выборочные числовые характеристики: среднее арифметическое, исправленную выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс, моду и медиану.

Найти:

а) вероятность того, что доля всех автомобилей, проезжающих в течении суток по данному участку пути, скорость которых превышает 80 км/час, отличается от полученной по выборке не более чем на 5%;

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена средняя скорость всех автомобилей, проезжающих через данный участок пути;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для генеральной средней скорости движения, полученные в п. б) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

5. Заменив параметры генеральной совокупности соответственно их наилучшими выборочными числовыми характеристиками, по данным задачи 4, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить две гипотезы о том, что изучаемая случайная величина ξ – скорость движения автомобиля – распределена:

а) по нормальному закону распределения;

б) по равномерному закону распределения.

Построить на чертеже, на котором изображена гистограмма эмпирического распределения и соответствующие графики равномерного и нормального распределений.

6. Распределение 60 предприятий по объему инвестиций в развитие производства ξ (млн. руб.) и получаемой за год прибыли η (млн. руб.) представлены в таблице:

ξ \ η	0–0,8	0,8–1,6	1,6–2,4	2,4–3,2	3,2–4,0	Итого:
2–4	2	2				4
4–6	2	7	10			19
6–8		2	17	7		26
8–10			4	3	2	9
10–12					2	2
Итого:	4	11	31	10	4	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить полученную прибыль при объеме инвестиций 5 млн. руб.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Для исследования доходов работников предприятия, численность которого составляет 1600 человек, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 160 человек (10% выборка). Полученные данные приведены в таблице:

Доходы, тыс. руб.	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	$\sum$
Частоты	7	15	26	40	32	21	14	5	160

1) Найти вероятность того, что средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия отличается от среднего дохода, полученного по выборке, не более, чем на 1 тыс. руб. по абсолютной величине.

2) Найти границы, в которых с вероятностью 0,9876 заключена средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия.

3) Определить объем бесповторной выборки, чтобы с вероятностью 0,9876 средняя месячная заработанная плата, полученная по выборке, отличалась от генеральной средней не более, чем на 1 тыс. руб.

4) Найти вероятность того, что доля работников предприятия, месячная заработанная плата которых не превышает 20 тыс. руб., отличается от полученной по выборке доли не более, чем на 5% по абсолютной величине.

5) Найти границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена доля работников предприятия, средняя месячная заработанная плата которых не более 20 тыс. руб.

6) Определить такой объем бесповторной выборки, чтобы с вероятностью 0,9545 доля работников предприятия, средняя месячная заработанная плата которых не более 20 тыс. руб., отличалась от полученной по выборке не более, чем на 5% (по абсолютной величине).

Ответить на тот же вопрос, если о выборочной доле ничего неизвестно.

Решение. По формуле средней арифметической для интервального вариационного ряда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i ,$$

где x_i – варианты вариационного ряда, равные срединным значениям интервалов разбиения; n_i – соответствующие им частоты; m – число интервалов разбиения, получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{160}\left(7,5\cdot 7 + 12,5\cdot 15 + 17,5\cdot 26 + 22,5\cdot 40 + 27,5\cdot 32 + 32,5\cdot 21 + 37,5\cdot 14 + 42,5\cdot 5\right) = 24,34 .$$

Аналогично определяется среднее арифметическое квадратов вариант вариационного ряда:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i .$$

Получим:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{160}\left(7,5^2\cdot 7 + 12,5^2\cdot 15 + 17,5^2\cdot 26 + 22,5^2\cdot 40 + 27,5^2\cdot 32 + 32,5^2\cdot 21 + 37,5^2\cdot 14 + 42,5^2\cdot 5\right) = 662,81.$$

Следовательно, выборочная дисперсия будет равна:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 662,81 - 24,34^2 = 70,19 ,$$

а среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{70,19} = 8,38 .$$

1) Вероятность того, что средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия отличается от среднего дохода, полученного по выборке не более, чем на 1 тыс. руб. по абсолютной величине, представляет собой доверительную вероятность или надежность. Она определяется через среднюю квадратическую ошибку выборки. Средняя квадратическая ошибка при оценке генеральной средней для собственно-случайной бесповторной выборки достаточно большого объема находим по формуле:

$$\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} .$$

По условию имеем, что $N = 1600$, $n = 160$ и $\Delta = 1$. Подставляя в последнее соотношение числовое значение вычисленной ранее выборочной дисперсии, получим:

$$\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{70{,}19}{160}\left(1-\frac{160}{1600}\right)}=0{,}63.$$

Доверительная вероятность (надежность) при оценке генеральной средней для собственно случайной бесповторной выборки достаточно большого объема, определяется по формуле:

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{x}-x_0\right| \le \Delta\right\} = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma'_{\bar{x}}}\right).$$

Таким образом, искомая доверительная вероятность будет равна [1, Приложение II, стр.200]:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{1}{0{,}63}\right)=\Phi(1{,}59)=0{,}8882.$$

2) Границы, в которых с вероятностью 0,9876 заключена средняя месячная заработанная плата всех работников данного предприятия, определяются предельной ошибкой выборки, которая возможна с заданной доверительной вероятностью.

Предельная ошибка бесповторной выборки находится как $\Delta = u \cdot \sigma'_{\bar{x}}$, где u- аргумент функции Лапласа, соответствующий доверительной вероятности γ, т.е. $\gamma = \Phi(u)$ и определяет точность полученных результатов.

Следовательно, оценка генеральной средней (доверительный интервал) будет удовлетворять следующему двойному неравенству:

$$\bar{x}-\Delta \le \bar{x}_0 \le \bar{x}+\Delta,$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя арифметическая.

Для заданной доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9876$ по таблице функции Лапласа находим, что значение ее аргумента будет равно $u = 2{,}5$. Следовательно, $\Delta = 2{,}5 \cdot 0{,}63 = 1{,}575$, и искомый доверительный интервал для генеральной средней будет иметь вид:

$$24{,}34-1{,}575 \le \bar{x}_0 \le 24{,}34+1{,}575 \quad \text{или} \quad 22{,}765 \le \bar{x}_0 \le 25{,}915.$$

3) Для определения объема повторной выборки, необходимого для того, чтобы гарантировать определенную точность оценки генеральной средней, задаваемую предельной ошибкой выборки Δ, при заданной надежности γ, используем формулу:

$$n \approx \frac{u^2 \cdot s^2}{\Delta^2}.$$

По условию задачи доверительная вероятность равна $\gamma = 0{,}9876$, что соответствует $u = 2{,}5$, а предельная ошибка равна $\Delta = 1$. Таким образом, объем повторной выборки приблизительно будет равен (округление производим всегда в большую сторону):

$$n \approx \frac{2{,}5^2 \cdot 70{,}19}{1^2} \approx 439.$$

Зная объем повторной выборки и объем генеральной совокупности, вычисляем объем бесповторной выборки по формуле:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{439 \cdot 1600}{439 + 1600} \approx 345.$$

4) На основании вариационного ряда, определим число объектов выборки, обладающих признаком: заработанная плата менее 20 тыс. руб. Этому признаку удовлетворяют варианты, принадлежащие первым трем интервалам. Следовательно, $m = 7 + 15 + 26 = 48$. Таким образом, выборочная доля будет составлять:

$$w = \frac{m}{n} = \frac{48}{160} = 0{,}3.$$

Полученный результат означает, что 30% опрошенных рабочих имеют заработанную плату менее 20 тыс. руб.

Вероятность того, что доля работников предприятия, месячная заработанная плата которых не превышает 20 тыс. руб., отличается от полученной по выборке доли не более чем на 5% по абсолютной величине, определяется через среднюю квадратическую ошибку выборки.

Средняя квадратическая ошибка собственно-случайной бесповторной выборки при оценке генеральной доли, находится по формуле:

$$\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)},$$

где w – выборочная доля.

Предельную ошибку выборки, равную 5%, представляем в виде доли. Она будет составлять $\Delta = 0,05$. Тогда средняя квадратическая ошибка бесповторной выборки будет равна:

$$\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{0,3\cdot(1-0,3)}{160}\cdot\left(1-\frac{160}{1600}\right)} = 0,034.$$

Так же, как и при оценке генеральной средней, доверительную вероятность выборочной доли определим по формуле:

$$\gamma = P\left\{\left|w-p\right| \le \Delta\right\} = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma'_w}\right).$$

Следовательно, искомая доверительная вероятность будет равна:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{0,05}{0,034}\right) = \Phi\left(1,47\right) = 0,8584.$$

5) Учитывая, что $\gamma = \Phi(u) = 0,9545$, по таблице функции Лапласа найдем $u = 2$ и определим предельную ошибку бесповторной выборки для доли:

$$\Delta = u\cdot\sigma'_w = 2\cdot 0,034 = 0,068.$$

Теперь искомый доверительный интервал для генеральной доли определяется соотношением:

$$0,3-0,068 \le p \le 0,3+0,068 \text{ или } 0,233 \le p \le 0,368.$$

6) Объем повторной выборки при оценке генеральной доли определяется соотношением:

$$n \approx \frac{u^2 w(1-w)}{\Delta^2}.$$

В качестве выборочной доли возьмем состоятельную оценку $w = 0{,}3$, полученную ранее. Учитывая что $\Delta = 0{,}05$, $\gamma = \Phi(u) = 0{,}9545$ и $u = 2$, объем повторной выборки приблизительно будет равен:

$$n \approx \frac{2^2 \cdot 0{,}3 \cdot (1-0{,}3)}{0{,}05^2} = 336.$$

Имея объемы повторной выборки и генеральной совокупности, определяем объем бесповторной выборки по формуле:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{336 \cdot 1600}{336+1600} \approx 278.$$

Рассмотрим случай, когда никаких предварительных исследований не проводилось и о выборочной доле ничего неизвестно. В этом случае можно вычислить максимально возможный объем повторной выборки, соответствующий заданной доверительной вероятности и точности, по формуле:

$$n = \frac{u^2}{4 \cdot \Delta^2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$n = \frac{2^2}{4 \cdot 0{,}05^2} = 400,$$

и, соответственно, объем бесповторной выборки будет равен:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{400 \cdot 1600}{400+1600} \approx 320.$$

Очевидно, что максимально возможное значение объема выборки оказалось значительно больше необходимого. □

Пример 2. Распределение 60 однотипных предприятий по стоимости производимой продукции (ξ, тыс. руб. за ед. продукции) и количеству реализованной продукции (η, тыс. ед.) представлено в таблице 1.

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

Стоимость ед. продукции, тыс. руб. (ξ)	*Середины интервалов*	*Количество реализованной продукции, тыс.ед.* (η)					n_i	*Групповая средняя,* $\overline{y}_j$
		20-30	30-40	40-50	50-60	60-70		
	y_j / x_i	25	35	45	55	65		
10-15	12,5			1	2	3	6	58,3
15-20	17,5			2	6	4	12	56,7
20-25	22,5		1	8	7	3	19	51,3
25-30	27,5	1	5	7	2		15	41,7
30-35	32,5	2	4	2			8	35,0
n_j		3	10	20	17	10	60	
Групповая средняя, $\overline{x}_i$		30,8	29,0	24,3	20,1	17,5		

Табл. 1.

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α= 0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η.

Решение. 1. Для каждого значения x_i вычислим групповые средние $\bar{y}_i$ по формулам:

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}.$$

Имеем:

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{6}(25\cdot 0 + 35\cdot 0 + 45\cdot 1 + 55\cdot 2 + 65\cdot 3) = 58{,}3;$$

$$\overline{y}_2 = \frac{1}{12}(25\cdot 0 + 35\cdot 0 + 45\cdot 2 + 55\cdot 6 + 65\cdot 4) = 56{,}7; \quad \ldots .$$

Аналогично, для каждого значения y_j вычислим групповые средние $\bar{x}_j$ по формулам:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{l} x_i n_{ij}.$$

Имеем:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(12{,}5\cdot 0 + 17{,}5\cdot 0 + 22{,}5\cdot 0 + 27{,}5\cdot 1 + 32{,}5\cdot 2) = 30{,}8;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{10}(12{,}5\cdot 0 + 17{,}5\cdot 0 + 22{,}5\cdot 1 + 27{,}5\cdot 5 + 32{,}5\cdot 4) = 29{,}0; \quad \ldots.$$

В таблице 1 вычисленные значения групповых средних $\bar{x}_j$ приведены в последней строке, а $\bar{y}_i$ в последнем столбце.

2. а) Найдем выборочные уравнения регрессии. Уравнение регрессии η по ξ и ξ по η имеют вид:

$$y_x - \bar{y} = b_{\eta\zeta}(x - \bar{x}), \quad x_y - \bar{x} = b_{\xi\eta}(y - \bar{y}),$$

где

$b_{\xi\eta} = \dfrac{\mu}{s_\eta^2}$ и $b_{\eta\xi} = \dfrac{\mu}{s_\xi^2}$ – выборочные коэффициенты регрессии ξ по η и ξ по η, соответственно;

$s_\xi^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ и $s_\eta^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$ выборочные дисперсия переменных ξ по η, соответственно;

$\mu = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$ – выборочный корреляционный момент или выборочная ковариация.

Для вычисления всех коэффициентов найдем необходимые суммы:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_j \frac{1}{60}(12{,}5\cdot 6 + 17{,}5\cdot 12 + 22{,}5\cdot 19 + 27{,}5\cdot 15 + 32{,}5\cdot 8) = 23{,}1;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_j = \frac{1}{60}(25\cdot 3 + 35\cdot 10 + 45\cdot 20 + 55\cdot 17 + 65\cdot 10) = 48{,}5;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_i = \frac{1}{60}(12{,}5^2\cdot 6 + 17{,}5^2\cdot 12 + 22{,}5^2\cdot 19 + 27{,}5^2\cdot 15 + 32{,}5^2\cdot 8) = 567{,}1;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 n_j = \frac{1}{60}(25^2\cdot 3 + 35^2\cdot 10 + 45^2\cdot 20 + 55^2\cdot 17 + 65^2\cdot 10) = 2471{,}7;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij} = \frac{1}{60}[12,5\cdot(45\cdot1+55\cdot2+65\cdot3)+17,5\cdot(45\cdot2+$$
$$+55\cdot6+65\cdot4)+22,5\cdot(35\cdot1+45\cdot8+55\cdot7+65\cdot3)+27,5\cdot(25\cdot1+$$
$$+35\cdot5+45\cdot7+55\cdot2)+32,5\cdot(25\cdot2+35\cdot4+45\cdot2)]=1075.$$

Таким образом, имеем:

$$\mu = 1075 - 23,1\cdot 48,5 = -44,54.$$

$$\bar{s}_\xi^2 = 567,1 - 23,1^2 = 34,24; \qquad \bar{s}_\eta^2 = 2471,7 - 48,5^2 = 119,42;$$

$$b_{\eta\xi} = \frac{-44,54}{34,24} = -1,30; \qquad b_{\xi\eta} = \frac{-44,54}{119,42} = -0,37.$$

Итак, уравнения регрессии имеют вид:

$y_x - 48,5 = -1,30\cdot(x - 23,1)$ или $y_x = -1,30x + 78,53;$

$x_y - 23,1 = -0,37\cdot(y - 48,5)$ или $x_y = -0,37y + 41,17.$

Построим графики полученных линий регрессии. Для построения прямых линий регрессии достаточно взять по две точки, удовлетворяющие каждому уравнению. Очевидно, что у них есть общая точка – точка пересечения $(\bar{x}, \bar{y})$. В нашем случае это $(23,1; 48,5)$. В качестве второй точки для линии регрессии η по ξ возьмем, например, точку $(30; 39,53)$, а для ξ по η – точку $(30,07; 30)$. Таким образом, график эмпирических и теоретических линий регрессии будет иметь вид, представленный на Рис. 1.

б) Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \pm\sqrt{b_{\eta\xi} b_{\xi\eta}}.$$

Знак «+» перед радикалом берется, если коэффициенты регрессии положительны, и знак «–», если коэффициенты регрессии отрицательные.

В нашем случае коэффициент корреляции будет равен:

$$r = -\sqrt{(-1,3)\cdot(-0,37)} = -\sqrt{0,48} = -0,69.$$

Поскольку коэффициент корреляции отрицательный, то наблюдается обратная связь. Так как коэффициент корреляции по абсолютной величине удовлетворяет соотношению $0,4<|r|<0,7$, то связь считается умеренной.

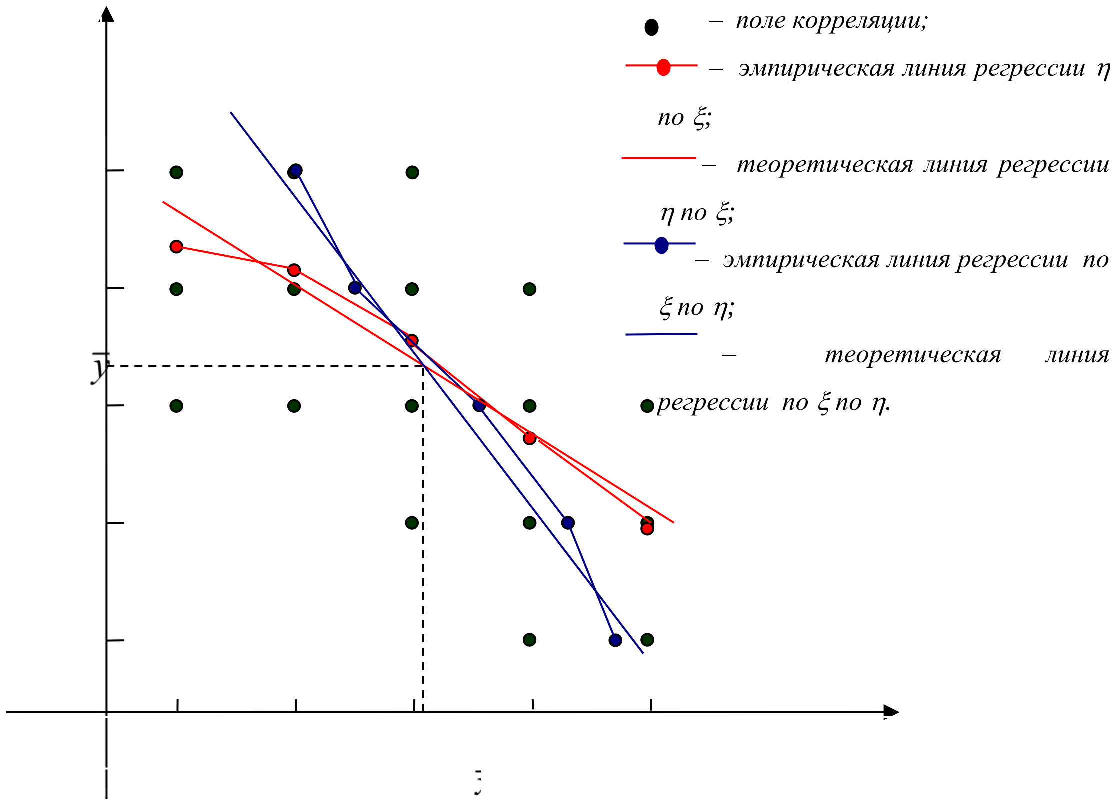

Рис. 1.

Проверим значимость коэффициента корреляции в рассматриваемом примере. Проверяется нулевая гипотеза H_0 об отсутствии линейной корреляционной связи между переменными в генеральной совокупности, т.е. коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю. При справедливости этой гипотезы статистика

$$t=\frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

имеет t-распределение Стьюдента с $k=n-2$ степенями свободы. Поэтому при заданном уровне значимости α гипотеза H_0 отвергается, т.е. выборочный коэффициент корреляции r значимо (существенно) отличается от нуля, если $t>t_{1-\alpha,k}$, где $t_{1-\alpha,k}$ – табличное значение t-распределения Стьюдента, определенное на уровне значимости α при числе степеней свободы $k = n - 2$.

Вычислим статистику критерия:

$$t = \frac{|-0{,}69|\sqrt{60-2}}{\sqrt{1-(-0{,}69)^2}} = 7{,}39.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = 60 - 2 = 58$ находим критическое значение статистики $t_{0{,}95;\,58} = 2{,}00.$ Поскольку вычисленная статистика больше своего критического значения ($t > t_{0{,}95;\,58}$), гипотеза H_0 отвергается, т.е. принимается альтернативная гипотеза о том, что коэффициент корреляции между стоимостью произведенной продукции и количеством ее реализации при заданном уровне значимости значимо отличается от нуля.

Экзаменационные вопросы

1. Классификация случайных событий: возможные и невозможные события, совместные и несовместные, противоположные и достоверные события. Примеры.

2. Полная группа событий. Пространство элементарных исходов. Примеры.

3. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности события. Примеры.

4. Статистическое определение вероятности события. Примеры. Теорема Бернулли (с доказательством).

5. Геометрическое определение вероятности. Примеры.

6. Сумма событий и ее свойства. Примеры.

7. Теорема сложения вероятностей (с доказательством) и ее следствия. Примеры.

8. Произведение событий и его свойства. Примеры.

9. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.

10. Формулы полной вероятности и Байеса. Примеры.

11. Случайная величина (определение). Дискретная случайная величина и ее закон (ряд) распределения. Основное свойство закона распределения. Примеры.

12. Совместный закон распределения двух дискретных случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Примеры. Основное свойство совместного закона распределения для независимых случайных величин.

13. Математические операции над дискретными случайными величинами. Примеры.

14. Функция распределения случайной величины, ее определение, свойства и график. Примеры.

15. Функция распределения дискретной случайной величины. Примеры.

16. Теорема о существовании случайной величины с заданной функцией распределения. Непрерывная случайная величина. Вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины. Примеры.

17. Абсолютно непрерывная случайная величина. Плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины, ее определение, свойства и график. Примеры.

18. Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Примеры.

19. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение случайной величины. Примеры.

20. Закон распределения Бернулли, его определение, свойства и примеры.

21. Биномиальный закон распределения, его определение, свойства и примеры.

22. Закон распределения Пуассона, его определение, свойства и примеры.

23. Геометрическое распределение, его определение, свойства и примеры.

24. Равномерный закон распределения, его определение, свойства и примеры.

25. Нормальный (гауссовский) закон распределения. Геометрический и вероятностный смысл параметров нормального закона распределения. Примеры.

26. Стандартный нормальный закон распределения. Функция Гаусса, ее свойства и график. Теорема о связи плотности нормального закона распределения и функции Гаусса.

27. Функция Лапласа, ее свойства, график и геометрический смысл. Теорема о связи функции распределения нормального закона и функции Лапласа. Примеры.

28.Свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону. Правило трех сигм. Примеры.

29. Показательный (экспоненциальный) закон распределения, его определение, свойства и примеры.

30. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Примеры.

31. Понятие о центральной предельной теореме. Локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа, условия их применимости. Примеры.

32. Следствия из интегральной теоремы Муавра—Лапласа. Примеры.

33. Асимптотическая формула Пуассона и условия ее применимости. Примеры.

34. Лемма Чебышева. Примеры.

35. Неравенство Чебышева. Примеры.

36. Понятие двумерной (n-мерной) случайной величины. Примеры. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения.

37. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин.

38.Понятие о двумерном нормальном законе распределения. Условные математические ожидания и дисперсии.

39. Вариационный ряд, его разновидности. Средняя арифметическая и дисперсия ряда. Гистограмма.

40. Генеральная совокупность. Выборки и способы их получения. Репрезентативная выборка.

41. Точечные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности и их свойства: несмещенность, состоятельность, эффективность.

42. Выборочная доля как точечная оценка генеральной доли, ее несмещенность и состоятельность.

43. Выборочная средняя как точечная оценка генеральной средней, ее несмещенность и состоятельность.

44. Выборочная дисперсия как точечная оценка генеральной дисперсии, ее смещенность и состоятельность. Несмещенная оценка генеральной дисперсии.

45. Интервальные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности. Доверительная вероятность. Предельная ошибка выборки. Средние квадратические ошибки выборок.

46. Построение доверительного интервала для генеральной доли признака.

47. Построение доверительного интервала для генеральной средней.

48. Определение необходимого объема повторной и бесповторной выборок при оценке генеральной средней и доли.

49. Основные принципы проверки статистических гипотез.

50. Критерий χ^2 – Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения.

51. t – критерий Стьюдента для проверки значимости коэффициента корреляции.

52. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Различия между ними. Основные задачи теории корреляции.

53. Линейная парная регрессия. Система нормальных уравнений для определения параметров прямых регрессии. Выборочная ковариация.

54. Оценка тесноты связи. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ
по дисциплине **«Теория вероятностей и математическая статистика»**
для студентов II курса заочного отделения бакалавриата по направлению «Экономика»

1. Классификация случайных событий: возможные и невозможные события, совместные и несовместные, противоположные и достоверные события. Примеры.
2. Два стрелка стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попаданий соответственно 0,8 и 0,7. Какова вероятность того, что не попадет ни один из них?
3. Студент, отправляясь на экзамен, подготовил ответы на 30 вопросов из 50. Найти вероятность того, что из трех заданных ему вопросов он ответит хотя бы на два.
4. На животноводческой ферме проводится обследование с целью определения среднего процента жирности молока. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки из 1000 коров было отобрано 50. Результаты наблюдения представлены в таблице:

Жирность молока, %	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3
Количество коров	2	3	7	8	9	11	7	2	1

Найти вероятность того, что средняя жирность молока всех коров отличается от выборочной средней не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ
по дисциплине **«Теория вероятностей и математическая статистика»**
для студентов II курса заочного отделения бакалавриата по направлению «Экономика»

1. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.
2. Уравнение линейной регрессии имеет вид: $y = -0{,}2x + 0{,}6.$ Известно, что среднее значение $\bar{y} = 2.$ Найти среднее значение $\bar{x}.$
3. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого из них в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Найти вероятность отказа за год работы: а) двух элементов; б) не менее двух элементов.
4. Из партии в 5000 электроутюгов проверено качество 10% электроутюгов. Среди проверенных оказалось 5% утюгов с дефектами. Найти вероятность того, что доля годных электроутюгов во всей партии отличается от доли их в выборке не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Значения функции Гаусса $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Значения функции Пуассона $P_\lambda(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m / λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m / λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Потемкин А.В., Эйсымонт И.М. *Анализ данных: учебное пособие*. – М.: Финансовый университет, 2014.
2. Потемкин А.В., Фридман М.Н., Эйсымонт И.М. *Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие*. М.: Финансовый университет, 2015.
3. А.В. Потемкин. Учебное пособие «Теория вероятностей и анализ данных в примерах и задачах»– М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2016.
4. Геворкян П.С. *Теория вероятностей и математическая статистика: Курс лекций*/ П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт.— М.: Экономика, 2012.

Дополнительная

5. Кремер Н.Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.: ЮНИТИ, 2003, 2004, 2007.
6. Браилов А.В., Солодовников А.С. *Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Часть 3. Теория вероятностей*. М.:Финансы и статистика, 2010.
7. Денежкина И.Е., Орлова М.Г., Швецов Ю.Н. *Основы математической статистики. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы бакалавров.* М.: Финансовая академия при правительстве РФ, 2010.
8. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. *Математика в экономике. Учебник в 3 ч. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика.* М:. Финансы и статистика, 2008.