Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок, И.М. Эйсымонт

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Часть 1

Учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент»
заочная ускоренная форма обучения

Утверждено на заседании Совета департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий (протокол №7 от16.01 2018 г.)

Москва 2018

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.172я73
П64

Рецензент: **Л.Р. Борисова, к.ф.-м.н., доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий.**

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок, И.М. Эйсымонт. Анализ данных. Часть 1. Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент», заочная ускоренная форма обучения. – М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2018, 59 с**.**

В пособии приведены варианты контрольной работы (с методическими указаниями по их выполнению), вопросы к зачету, примеры типовых задач с решениями, примеры тестовых заданий для студентов первого курса бакалавриата, обучающихся по заочной ускоренной форме обучения по направлениям «Экономика» и «Менеджмент».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.172я73

Учебное издание

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.И. Цыганок, И.М. Эйсымонт

Анализ данных. Часть 1

Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент», заочная ускоренная форма обучения.
Усл.п.л. 3.7

Компьютерный набор, верстка: ***И.М. Эйсымонт***

Формат 60x90/16. ГарнитураTimes New Roman

Содержание

Введение

Основное содержание дисциплины «Анализ данных» для бакалавров направлений «экономика» и «менеджмент» и требования, предъявляемые образовательными стандартами к результатам освоения дисциплины, изложены в рабочей программе учебной дисциплины. Дисциплина изучается во втором и в третьем семестрах. Настоящее пособие «Анализ данных. Часть 1» разработано по материалу второго семестра.

В пособии приведем перечень вопросов к зачету, который поможет студентам систематизировать полученные в первом семестре знания и подготовиться к сдаче зачета, варианты контрольной работы и список рекомендованной литературы.

Вопросы к зачету

1. Классификация случайных событий: возможные и невозможные события, совместные и несовместные, противоположные и достоверные события. Примеры.

2. Полная группа событий. Пространство элементарных исходов. Примеры.

3. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности события. Примеры.

4. Статистическое определение вероятности события. Примеры.

5. Геометрическое определение вероятности. Примеры.

6. Сумма событий и ее свойства. Примеры.

7. Теорема сложения вероятностей (с доказательством) и ее следствия. Примеры.

8. Произведение событий и его свойства. Примеры.

9. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.

10. Формулы полной вероятности и Байеса. Примеры.

11. Случайная величина (определение). Дискретная случайная величина и ее закон (ряд) распределения. Основное свойство закона распределения. Примеры.

12. Совместный закон распределения двух дискретных случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Примеры. Основное свойство совместного закона распределения для независимых случайных величин.

13. Математические операции над дискретными случайными величинами. Примеры.

14. Функция распределения случайной величины, ее определение, свойства и график. Примеры.

15. Функция распределения дискретной случайной величины. Примеры.

16. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства. Примеры.

17. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение случайной величины. Примеры.

18. Закон распределения Бернулли, его определение, свойства и примеры.

19. Биномиальный закон распределения, его определение, свойства и примеры.

20. Закон распределения Пуассона, его определение, свойства и примеры.

21. Геометрическое распределение, его определение, свойства и примеры.

22. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Примеры.

23. Понятие двумерной случайной величины. Примеры. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения.

24. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин. Связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин.

25. Условные математические ожидания и дисперсии.

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо переписать ее условие, а затем, после слова «Решение», привести решение, к каждому этапу которого должны быть даны развернутые объяснения и описание вводимых обозначений. Используемые формулы и теоремы должны записываться с необходимыми пояснениями. Окончательный ответ следует выделить и сформулировать словесно.

Все расчеты нужно проводить тщательно с учетом правил приближенных вычислений. Учитывая, что используемые при решении задач таблицы четырехзначные, все промежуточные вычисления следует проводить с четырьмя верными знаками после запятой, а окончательный ответ дать с тремя верными знаками, правильно округлив полученный до этого результат.

В конце работы указывается список использованной литературы, ставится дата окончания работы и подпись. Поля в тетради, где выполняется работа, должны быть не менее 3 см.

Зачетная работа хранится у студента и обязательно предъявляется на экзамене. В случае успешной сдачи экзамена работа остается у экзаменатора.

Индивидуальный номер варианта соответствует последней цифре номера личного дела студента, который совпадает с номером зачетной книжки и студенческого билета.

Контрольная работа не рассматривается, если ее вариант не совпадает с последней цифрой номера личного дела студента или она выполнена по вариантам прошлых лет.

Варианты контрольной работы

ВАРИАНТ 1

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1)

1. При приеме на работу каждый соискатель проходит два теста и собеседование. Среди трех соискателей первый может успешно пройти первый тест с вероятностью 0,7, второй тест – с вероятностью 0,9, а собеседование – с вероятностью 0,3. У второго соискателя соответствующие вероятности равны 0,6, 0,7 и 0,7, а у третьего – 0,9, 0,7 и 0,5. Решение о приеме на работу принимается, после того, как успешно пройдены все три теста. У кого из этих трех соискателей больше вероятность быть принятым на работу?

2. Три различные торговые сети могут в течение дня неожиданно предложить скидку на электротовары в своих магазинах с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,5 соответственно. Покупатель, которому нужен холодильник, находится на одинаковом расстоянии от трех магазинов, принадлежащих различным торговым сетям, и выбирает магазин случайным образом. Какова вероятность того, что он попадет на скидку?

3. В Интернет-магазине приобретается смартфон. Курьер приносит на дом покупателю 5 одинаковых смартфонов, среди которых три (заранее неизвестно какие) бракованные. Покупатель проверяет один за другим, пока не найдет хороший прибор, но делает не более трех попыток.

   Составить закон распределения случайной величины – числа произведенных попыток.

   Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

   Построить функцию распределения.

4. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}1$. Найти:

а) $M(2\xi - 5)$;

б) $D(3 - 2\xi)$;

в) $P(|\xi - M\xi| < \sigma(\xi))$.

5. Дан закон распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

	$\xi = 0$	$\xi = 1$	$\xi = 3$	$\xi = 4$
$\eta = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$\eta = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$\eta = 1$	0,1	0,1	0,1	0

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.

3) Являются ли случайные величины ξ и η зависимыми?

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\eta | \xi > 0)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

1. Ребенок играет с карточками, на каждой из которых написана одна из букв: *В, Н, Р, А, 0, 0*. Определить вероятность того, что мы сможем прочесть слово «*ВОРОНА*» при случайном расположении им карточек в ряд.

2. На первом станке обработано 25 деталей, из них 5 с дефектами, на втором обработано 30 деталей, из них 6 с дефектами, на третьем обработано 60 деталей, из них 10 с дефектами. Наудачу выбранная деталь оказалась с дефектами. Найти вероятность того, что она обработана на 3-м станке.

3. Первый тур отбора кандидатов на получение стипендии для бесплатного обучения иностранному языку является заочным. Было подано 20 заявок, из которых 7 содержало недостоверные сведения о кандидатах. Наудачу было отобрано 5 заявок.

Составить закон распределения случайной величины – числа недостоверных заявок среди отобранных.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами $\lambda = 2$ для величины ξ и $\lambda = 0{,}3$ для величины η. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = 2\xi - 10\eta$.

5. Случайные величины ξ и η имеют следующий совместный закон распределения: $P(\xi=-2,\eta=0)=\frac{1}{12}$; $P(\xi=-2,\eta=1)=\frac{1}{12}$; $P(\xi=-2,\eta=2)=\frac{5}{24}$; $P(\xi=-1,\eta=0)=\frac{1}{8}$; $P(\xi=-1,\eta=1)=\frac{1}{4}$; $P(\xi=-1,\eta=2)=\frac{1}{4}$.

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Выяснить, зависимы или нет события $\{\eta = 2\}$ и $\{\xi = -\eta\}$.

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\xi | \eta \ge 1)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

1. В отделе 20 сотрудников, каждый из которых по списку имеет свой порядковый номер от 1 до 20. Руководитель отдела решил поощрить сотрудников, вручив каждому с четным номером – денежную премию, с номером, который делится на 3 – сертификат на пребывание в спа-отеле, а остальным оплатил краткосрочные языковые курсы.

Какова вероятность того, что сотрудник получил:

а) два вознаграждения;

б) ровно одно вознаграждение;

в) все три вознаграждения?

2. В магазин поступили телевизоры от трех дистрибьютеров в отношении 1:3:6. Телевизоры, поступающие от 1-го дистрибьютора, требуют наладки в 3% случаев, от 2-го и 3-го – соответственно 2% и 1%. Найти вероятность того, что поступивший в магазин телевизор требует наладки.

3. Фирма взяла 5 машин в лизинг. Известно, что вероятность того, что машина попадет в аварию за время действия договора, равна 0,3.

Составить закон распределения случайной величины – числа аварий с данными машинами за время действия лизингового соглашения.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η имеют геометрические распределения с параметрами $p = 0{,}2$ для величины ξ и $p = 0{,}1$ для величины η. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = \xi - 2\eta$, если известен коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta) = 0{,}8$.

5. Дан закон распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

	$\xi = 4$	$\xi = 5$	$\xi = 6$	$\xi = 7$
$\eta = 0$	0,1	0	0,1	0,1
$\eta = 1$	0	0,1	0	0,1
$\eta = 2$	0,1	0,2	0,2	0

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.

3) Являются ли случайные события $\{\eta = 2\}$ и $\{\xi = 4\}$ зависимыми?

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\eta | \xi > 5)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 4

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)

1. Какова вероятность набрать правильный пароль при входе в личный кабинет, если известно, что на первом и втором месте может стоять любая цифра (цифры могут повторяться), а на третьем и четвертом местах – одна из 8 гласных букв, причем они не могут совпадать?

2. Служащий банка может ездить на работу на трамвае или на автобусе. В 1/3 случаев он пользуется трамваем, а в 2/3 – автобусом. Если он едет на трамвае, то опаздывает с вероятностью 0,05, а если едет на автобусе, то с вероятностью 0,01. Сегодня служащий опоздал. Какова вероятность, что он ехал на трамвае?

3. Среди 6 Интернет-провайдеров в городе четыре предлагают бесплатный пакет телевидения. Для подключения нового дома к Интернету жилищная компания обзванивает Интернет-провайдеров в случайном порядке, пока не найдет провайдера с бесплатным телевизионным пакетом.

Составить закон распределения случайной величины – числа произведенных звонков.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют биномиальные распределения с параметрами n = 20 и p = 0,3 для величины ξ и n = 30 и p = 0,2 для величины η. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = 2\xi - \eta$.

5. Случайные величины ξ и η имеют следующий совместный закон распределения: $P(\xi = 1, \eta = 1) = 0{,}13$; $P(\xi = 1, \eta = 2) = 0{,}17$; $P(\xi = 1, \eta = 3) = 0{,}19$; $P(\xi = 2, \eta = 1) = 0{,}19$; $P(\xi = 2, \eta = 2) = 0{,}1$; $P(\xi = 2, \eta = 3) = 0{,}22$.

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Выяснить, зависимы или нет события $\{\xi=1\}$ и $\{\xi=\eta\}$.

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma=(\eta|\xi=1)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

1. На полке в супермаркете среди 20 одинаковых наборов батареек четыре бракованных. Покупатель случайным образом берет три набора и кладет их в корзину. Найти вероятность того, что покупателю достались:

   а) все бракованные наборы;

   б) только один бракованный набор;

   в) все хорошие наборы.

2. В магазин «АВТОЗАПЧАСТИ» поступают ремни генератора от двух фирм производителей в отношении 1:3. Ремни, поступившие от первой фирмы, на первой тысяче километров пробега рвутся в каждом десятом случае, а от второй – в каждом 20 случае. Какова вероятность того, что купленный в магазине ремень не порвется на первой тысяче километров пробега?

3. Для регистрации на Интернет-сайтах у пользователя есть четыре пароля. Он зарегистрировался в социальной сети, а пароль забыл, поэтому осуществляет ввод одного пароля за другим, пока не найдет правильный.

   Составить закон распределения случайной величины – числа произведенных попыток.

   Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить функцию распределения.

4. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0{,}2$. Найти:

   а) $M(3\xi + 10)$;

   б) $D(4 - 10\xi)$;

   в) $P(|\xi - M\xi| < 3\sigma(\xi))$.

5. Дан закон распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

	$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = 2$
$\eta = 1$	0,1	0,1	0,1
$\eta = 2$	0,1	0,2	0,1
$\eta = 4$	0,1	0,1	0,1

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Являются ли случайные события $\{\xi > 0\}$ и $\{\eta > \xi\}$ зависимыми?

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\eta | \xi > 0)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

1. Клиент выбирает банк для получения ипотечного кредита по нескольким показателям: стабильность банка, процентная ставка, условия досрочного погашения кредита. Статистика показывает, что клиенты данного банка удовлетворены первым показателем с вероятностью 0,7, вторым – с вероятностью 0,6, третьим – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что клиент, обратившись в банк, будет удовлетворен:

а) всеми тремя показателями;

б) только двумя показателями;

в) хотя бы одним из показателей?

2. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях выделено из первой группы курса 4 студента, 6 из второй, и 5студентов из третьей. Вероятности того, что отобранный студент из первой, второй, третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,5, 0,4 и 0,2. Наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную. К какой из указанных трех групп он вероятнее всего принадлежит?

3. В стопке из 6 книг 3 книги по математике и 3 по информатике. Выбирают наудачу три книги.

Составить закон распределения числа книг по математике среди отобранных.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайная величина ξ распределена по геометрическому закону с параметром $p = 0,3$. Найти:

а) $M(6\xi + 4)$;

б) $D(4 - 3\xi)$;

в) $P(|\xi - M\xi| < \sigma(\xi))$.

5. Случайные величины ξ и η имеют следующий совместный закон распределения: $P(\xi=-1,\eta=-1)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=-1,\eta=0)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=-1,\eta=1)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=0,\eta=-1)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=0,\eta=1)=\frac{1}{6}$.

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Выяснить, зависимы или нет события $\{\xi=-1\}$ и $\{\xi=\eta\}$.

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma=(\xi|\eta=0)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

1. Студент пришел на зачет, зная 24 вопроса из 30. Какова вероятность сдать зачет, если для получения зачета необходимо ответить на один вопрос, а преподаватель задает последовательно не более двух вопросов.

2. Два цеха выпускают однотипную продукцию. Производительность первого в 2 раза выше, чем 2-го. Изделия удовлетворительного качества составляют в среднем 80% среди продукции 1-го цеха и 60% среди продукции 2-го. Наудачу взято одно изделие из не рассортированной продукции этих цехов. Какова вероятность того, что оно высшего качества?

3. Владелец трех пакетов акций может получить в текущем году дивиденды: в размере 1 тыс. ден. ед. по первому пакету с вероятностью 0,7, по второму пакету 2 тыс. ден. ед. с вероятностью 0,6, а третий пакет акций предполагает выплату 5 тыс. ден. ед. с вероятностью 0,3.

Составить закон распределения случайной величины – размера дивидендов в текущем году.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η имеют биномиальные распределения с параметрами n = 40 и p = 0,2 для величины ξ и n = 100 и p = 0,1 для величины η.

Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = 10\xi - 2\eta$, если известен коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta) = -0{,}7$.

5. Дан закон распределения двумерной случайной величины (ξ,η):

	$\xi=-2$	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	0,1	0,2	0,1	0,1
$\eta=0$	0	0,1	0	0,2
$\eta=2$	0,1	0	0,1	0

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Являются ли случайные события $\{\xi=-2\}$ и $\{\eta=-1\}$ зависимыми?

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma=(\xi|\eta=0)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

1. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований 5 команд экстра класса. Найти вероятность того, что в одну из групп попадут две команды экстра класса, а в другую три.

2. В двух одинаковых коробках лежат карандаши. В первой 12 красных и 8 синих, во второй 6 красных и 4 синих. Из случайно выбранной коробки наугад берется один карандаш. Найти вероятность того, что красный карандаш был взят из второй коробки.

3. Пульт охраны связан с тремя охраняемыми объектами. Вероятность поступления сигнала с этих объектов составляет соответственно 0,2, 0,3 и 0,6.

Составить закон распределения числа объектов, с которых поступит сигнал.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Найти:

а) $M(4-3\xi)$;

б) $D(4-3\xi)$;

в) $P(|\xi - M\xi| < \sigma(\xi))$.

5. Случайные величины ξ и η имеют следующий совместный закон распределения: $P(\xi=1, \eta=1)=0{,}14$; $P(\xi=1, \eta=2)=0{,}18$; $P(\xi=1, \eta=3)=0{,}16$; $P(\xi=2, \eta=1)=0{,}11$; $P(\xi=2, \eta=2)=0{,}2$; $P(\xi=2, \eta=3)=0{,}21$.

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi$, $M\eta$ и дисперсии $D\xi$, $D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.

3) Выяснить, зависимы или нет события $\{\eta = 1\}$ и $\{\xi \geq \eta\}$.

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\xi | \eta \geq 2)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

1. Пловца в команду принимают следующим образом. Сначала он должен проплыть 100 м за определенное время. Если справится, то 400 м за определенное время. Если и с этим справится, тогда километровую дистанцию за определенное время. Два спортсмена претендуют на место в команде, причем первый вовремя преодолевает соответствующие дистанции с вероятностями 0,7, 0,9 и 0,8, а второй – с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что в команду:

   а) будет принят первый из них;

   б) будет принят хотя бы один из них;

   в) будут приняты оба;

   г) будет принят только один из них?

2. В команде три стрелка, которые попадают в цель с вероятностью 0,9, пять стрелков, попадающих с вероятностью 0,8, и тринадцать, попадающих с вероятностью 0,7. Для зачетного выстрела стрелок определяется жребием. Какова вероятность того, что он попадет в цель?

3. Известно, что на собеседовании при приеме на работу в среднем каждый пятый претендент завышает свою предыдущую зарплату.

   Составить закон распределения случайной величины – числа претендентов на собеседовании, честно сообщивших о своей предыдущей зарплате, среди 4 претендентов.

   Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрические распределения с параметрами $p = 0{,}5$ для величины ξ и $p = 0{,}4$ для величины η. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = 2\xi - 3\eta$.

5. Дан закон распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

	$\xi = -2$	$\xi = 0$	$\xi = 1$	$\xi = 2$
$\eta = 1$	0,04	0,1	0,02	0,04
$\eta = 2$	0,04	0,1	0,02	0,04
$\eta = 4$	0,12	0,3	0,06	0,12

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.

3) Являются ли случайные величины ξ и η зависимыми?

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma = (\xi | \eta = 2)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

ВАРИАНТ 10

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)

1. Студент, отправляясь на экзамен, подготовил ответы на 30 вопросов из 50. Найти вероятность того, что из трех заданных ему вопросов он ответит хотя бы на два.

2. В коробку с двадцатью новыми батарейками случайно попали пять использованных. Из коробки наугад извлекается батарейка и вставляется в устройство. Вероятность того, что за месяц работы разрядится новая батарейка, равна 0,1, а для использованной такая вероятность равна 0,9. Устройство проработало в течение месяца. Какова вероятность того, что в нем была использованная батарейка?

3. Собеседование при приеме на работу в крупную международную компанию состоит из четырех последовательных этапов: (I) проверка владения иностранным языком, (II) уровень владения компьютером, (III) профессиональный уровень, (IV) беседа с одним из руководителей. Если соискатель какой-то этап не прошел, то к следующему он не допускается.

   Студенты одного престижного вуза, как показала практика, проходят успешно каждый этап с вероятностями 0,8, 0,7, 0,6 и 0,3 соответственно.

   Составить закон распределения случайной величины – числа этапов, которые студент данного престижного вуза пройдет успешно.

   Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, построить функцию распределения.

4. Случайные величины ξ и η независимы. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 5$, а случайная величина η распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}4$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\gamma = 3\xi - 5\eta$.

5. Случайные величины ξ и η имеют следующий совместный закон распределения: $P(\xi=-1,\eta=-1)=\frac{1}{12}$; $P(\xi=-1,\eta=0)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=-1,\eta=1)=\frac{1}{12}$; $P(\xi=0,\eta=-1)=\frac{1}{6}$; $P(\xi=0,\eta=0)=\frac{5}{12}$; $P(\xi=0,\eta=1)=\frac{1}{12}$.

1) Выписать одномерные законы распределения случайных величин ξ и η, вычислить математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

2) Найти ковариацию $Cov(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

3) Выяснить, зависимы или нет события $\{\eta=-1\}$ и $\{\xi=-0\}$.

4) Составить условный закон распределения случайной величины $\gamma=(\eta|\xi=0)$ и найти $M\gamma$ и $D\gamma$.

Примеры решение типовых задач

Пример 1. В ящике находится 5 красных и 3 зеленых шара. Наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что он красный?

Решение. Все элементарные исходы данного эксперимента – это шары, находящиеся в ящике, т.е. по правилу суммы число всевозможных исходов будет $n = |\Omega| = 5 + 3 = 8.$ Все элементарные исходы равновозможны, следовательно, можно применять классическое[1] определение вероятности. Пусть событие A состоит в том, что извлеченный шар красный, тогда число благоприятных исходов $m = |A| = 5.$ Таким образом, для вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{8} = 0{,}625. \quad \square$$

Пример 2. На полке в случайном порядке расставлены 8 книг, среди которых находится двухтомник Д. Лондона. Предполагается, что различные расположения книг равновероятны. Найти вероятность того, что оба тома расположены рядом, причём первый том слева от второго.

Решение. Пространство элементарных исходов – это множество перестановок[2] из 8 книг. Поскольку разные перестановки книг на полке равновероятны, то речь идёт о классическом определении вероятности. Общее число различных перестановок из 8 книг равно 8!.

Теперь посчитаем количество благоприятных исходов. Первый том может занять одно из 7 мест (первый том не может стоять последним на полке). Второй том поставим рядом справа от первого, а остальные книги расставим на оставшиеся 6 мест; для этого существует 6! способов. Таким

[1] Вероятность наступления события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех равновозможных исходов, составляющих полную группу. [4, стр. 16], [3, стр. 19].

[2] Если комбинации, состоящие из n элементов, отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют перестановками из n элементов. [4, стр. 27], [3, стр.25]

образом, согласно правилу произведения[3] число благоприятных исходов равно $7\cdot 6!=7!$.

По классическому определению вероятность того, что тома будут стоять рядом, равна отношению $\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}=0{,}125$. □

Пример 3. Компания из 10 человек рассаживается в ряд случайным образом. Найти вероятность того, что между двумя друзьями окажется ровно 3 человека.

Решение. Пусть события *A – между двумя друзьями оказалось ровно 3 человека*.

Существует два подхода к решению этой задачи. Первый подход состоит в том, что люди рассаживаются в ряд. В этом случае элементарные исходы – это перестановки из 10 человек, и их число – это общее число исходов эксперимента: $n = 10!$.

Чтобы посчитать число благоприятных исходов, заметим, что существует только 6 способов выбрать места для друзей так, чтобы между ними было ровно три человека. Действительно, если одного из друзей посадить на первое (крайнее слева место), то второго нужно посадить на 4-е место и т.д. Если одного на 6-е место, то второго на 10-е. После того, как места для друзей выбраны, нужно их посадить на эти места. Это можно сделать двумя способами. Далее на оставшиеся 8 мест необходимо рассадить остальных членов компании. Различных вариантов рассадки будет 8!.

Согласно правилу умножения, варианты выбора мест, варианты рассадки друзей и варианты заполнения оставшихся мест нужно перемножить: $m = 2\cdot 6\cdot 8!$.

Таким образом, вероятность события *A*, согласно классическому определению вероятности будет равна

---

[3] **Правило произведения.** Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами и после каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран n_2 способами, то выбор пары $(a_1; a_2)$ в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2$ способами. [4, стр. 26], [3, стр. 25]

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2\cdot 6\cdot 8!}{10!}=\frac{2\cdot 6}{9\cdot 10}=\frac{2}{15}\approx 0{,}133.$$

Другой подход в решении этой задачи связан не с размещением людей, а с выбором двух мест для друзей. Так как порядок выбора двух мест из 10 не важен, то их выбор будет представлять собой сочетания[4] из 10 по 2. Число таких сочетаний равно $n=C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=45$. Событию *A*, выбору 2 мест, так чтобы между ними было ровно 3 места, благоприятствует $m=6$ способов. Таким образом, искомая вероятность события *A* равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}\approx 0{,}133.\square$$

Пример 4. Компания из 10 человек рассаживается за круглым столом случайным образом. Найти вероятность того, что между двумя друзьями окажется ровно 3 человека.

Решение. Пусть событие *A – между двумя друзьями оказалось ровно 3 человека*.

Будем считать, что смещение всей компании по кругу на одно место без смены взаимного расположения людей – это различные исходы данного эксперимента. Тогда общее число исходов равно $n=P_{10}=10!$. В отличие от примера 1.3 за круглым столом существует 10 различных способов выбрать места для друзей так, чтобы между ними было ровно три человека. Дальнейшее рассуждение аналогично: на выбранные места друзей можно посадить двумя способами, а всех остальных членов компании можно рассадить 8! способами. Согласно правилу произведения число благоприятных исходов для события *A*, определяется соотношением $m=2\cdot 10\cdot 8!$. Таким образом, вероятность события *A*, согласно классическому определению вероятности равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2\cdot 10\cdot 8!}{10!}=\frac{2}{9}\approx 0{,}222.\square$$

[4] Если комбинации из *n* элементов по *m* отличаются только составом элементов (порядок их следования неважен) и элементы не повторяются, то такие подмножества называют сочетаниями без повторений. [4, стр. 28], [3, стр. 26]

Пример 5. Дано 5 карточек с буквами К, М, Р, О, Я. Найти вероятность того, что:

а) наугад выбранные и разложенные в ряд одна за другой три карточки образуют слово РОМ;

б) при случайном расположении в ряд всех пяти карточек получится слово МОРЯК.

Решение. а) Пусть события A – *при выборе трех карточек получится слово РОМ*. Различные комбинации трех букв из имеющихся пяти представляют собой размещения[5], так как могут отличаться как составом входящих букв, так и порядком их следования, или и тем, и другим. Общее число таких размещений, а значит, и число исходов эксперимента, будет равно $n = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} = 60$. При этом, благоприятный исход ровно один $m = 1$. Таким образом, согласно классическому определению вероятности, вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017.$$

б) Пусть событие B – *при случайном расположении в ряд всех пяти карточек получится слово МОРЯК*. Различные комбинации из имеющихся пяти букв представляют собой перестановки, так как отличаются друг от друга только порядком следования букв. Таким образом, общее число исходов этого эксперимента равно числу перестановок из пяти букв, т.е. $n = P_5 = 5! = 120$. Число исходов, благоприятствующих событию B, составляет $m = 1$. Поэтому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083. \square$$

[5] Размещениями без повторений из n элементов по m называются такие подмножества, состоящие из m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем и другим. [4, стр. 27], [3, стр. 25]

Пример 6. Дано 6 карточек с буквами. На трех из них написана буква *А*, на двух – буква *Н* и на одной буква *С*. Найти вероятность того, что при расстановке всех букв в ряд получится слово АНАНАС.

Решение. Пусть событие *А* – *получилось слово АНАНАС*. В отличие от примера 1.5, здесь буквы в слове повторяются. Поэтому число всевозможных случаев будет определяться числом перестановок с повторениями: $n=\frac{P_6}{P_3\cdot P_2}=\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$, а число случаев, благоприятствующих событию *А*, равно $m=1$. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{60}\approx 0{,}0167\,. \ \square$$

Пример 7. В классе учатся 10 юношей и 15 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три школьника. Найти вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

Решение. По условию задачи испытание состоит в том, что для дежурства производится выбор трех учащихся из их общего количества, равного 25. В нашем случае, когда фамилии дежурных не важны, а важен лишь их пол, все исходы такого эксперимента будут представлять собой полную группу событий, которая может быть представлена схематично (рис. 1). Суть представленной схемы следующая.

В классе всего 25 человек, среди которых 10 юношей и 15 девушек (верхняя строка схемы). В результате испытания из 25 человек отбирают троих (в нижних строках столбец по центру). Среди этих трех человек может встретиться от 0 до 3 юношей (левый столбец нижних строк) и, наоборот, от 3 до 0 девушек (правый столбец нижних строк). Так, например, если юношей отобрано трое, то формально можно сказать, что девушек отобрано нуль (на схеме это событие выделено цветом). Рассуждая аналогично, получаем все остальные возможные исходы данного испытания.

Заметим, что такие события в данном случае не являются равновозможными, но их вероятности могут быть найдены с помощью комбинаторики.

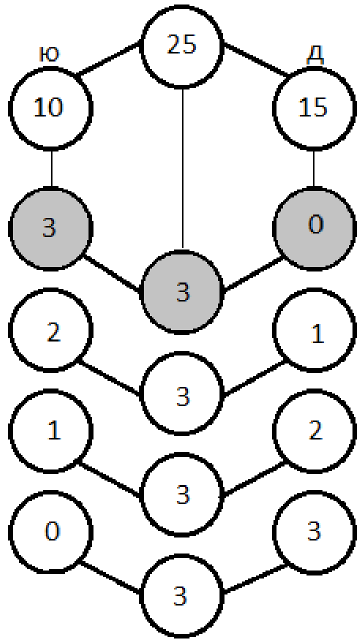


Рис. 1

Поскольку порядок выбора учащихся не важен, то имеем дело с сочетаниями без повторений, т.е., общее число таких равновозможных исходов данного испытания – это число сочетаний из 25 по 3:

$$n = C_{25}^{3} = \frac{25!}{22!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 23\cdot 4\cdot 25 = 2300.$$

Событие A – *среди отобранных дежурных только юноши* – на схеме выделено цветом и наступает тогда и только тогда, когда из 10 юношей выберут трех, а из 15 девушек – ни одной. Согласно правилу произведения, для подсчета числа благоприятных исходов нужно перемножить число сочетаний из 10 по 3 и из 15 по 0:

$$m = C_{10}^{3}\cdot C_{15}^{0} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 1 = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120.$$

При подсчете применили свойство числа сочетаний, а именно $C_n^0 = 1$. Далее, согласно классическому определению вероятности, искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{120}{2300}\approx 0{,}052.\square$$

Пример 8. Колода игральных карт (36 листов, 4 масти по 9 карт в каждой) тщательно перетасована. Наудачу берут 6 карт (без возвращения).

Найти вероятность того, что среди этих карт окажутся карты всех мастей.

Решение. Множество всех возможных равновероятных исходов – это множество неупорядоченных наборов по шесть различных карт. Всего таких наборов $n=C_{36}^{6}$. Рассматриваемое событие A – *есть представители всех мастей* – представим в виде объединения двух несовместных событий B и C, где B – *одна масть представлена тремя картами, а остальные три по одной* – и C – *две масти по две карты и две по одной*. Согласно правилу суммы[6] число исходов, благоприятных для события A, равно сумме числа благоприятных исходов событий B и C.

Найдем число благоприятных исходов события B. Зафиксируем масть, которая будет представлена тремя картами. Это можно сделать $C_4^1=4$ способами. Далее нужно из выбранной масти взять три карты, число вариантов C_9^3, а из остальных мастей выбрать по одной карте, число вариантов для каждой масти $C_9^1=9$. Таким образом, по правилу произведения имеем $m_B=C_4^1\cdot C_9^3\cdot\left(C_9^1\right)^3$. Аналогично, находим число благоприятных исходов события C: $m_C=C_4^2\cdot\left(C_9^2\right)^2\cdot\left(C_9^1\right)^2$.

Отсюда $m_A=m_B+m_C=C_4^1\cdot C_9^3\cdot\left(C_9^1\right)^3+C_4^2\cdot\left(C_9^2\right)^2\cdot\left(C_9^1\right)^2$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m_B+m_C}{n}=\frac{C_4^1\cdot C_9^3\cdot\left(C_9^1\right)^3+C_4^2\cdot\left(C_9^2\right)^2\cdot\left(C_9^1\right)^2}{C_{36}^{6}}\approx 0{,}449.\square$$

[6] **Правило суммы.** Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, элемент a_2 — другими n_2 способами, то выбор одного из элементов a_1 или a_2 может быть осуществлен n_1+n_2 способами. [4, стр. 25], [3, стр. 24]

Пример 9. Телефонный номер состоит из 7 цифр. При этом известно, что номер не может начинаться с цифры ноль. Какова вероятность того, что выбранный наудачу телефонный номер будет состоять из:

а) различных,

б) одинаковых,

в) нечетных цифр?

Решение. Сначала выясним, сколько семизначных телефонных номеров существует. Очевидно, что число семизначных номеров совпадает с числом семизначных чисел. Первую цифру номера можно выбрать 9 способами, а все остальные 10. Следовательно, согласно правилу произведения число таких номеров (семизначных чисел) будет равно $n = 9 \cdot 10^6$.

а) Пусть событие A – *телефонный номер состоит из различных цифр*. Число таких номеров определим следующим образом. Так же как и в общем случае первую цифру можно выбрать 9 способами, а оставшиеся 6 цифр представляют собой размещения из оставшихся 9 цифр по 6. Тогда на основании правила произведения, получим, что $m_A = 9 \cdot A_9^6 = \dfrac{9 \cdot 9!}{3!} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{544320}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}06048.$$

б) Пусть событие B – *телефонный номер состоит из одинаковых цифр*. Число таких номеров равно $m_B = 9$ и, следовательно,

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{9}{9 \cdot 10^6} = 10^6 = 0{,}000001.$$

в) Пусть событие C – *телефонный номер состоит из нечетных цифр*. Так как нечетных цифр у нас пять, то число номеров, состоящих из нечетных цифр, будет определяться числом размещений с повторениями[7] из 5 элементов по 7. Число таких размещений $m_C = 5^7 = 78125$. Таким образом,

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{78125}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}0087. \square$$

Пример 10. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошли три человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже со 2-го по 9-й. Предполагая, что всевозможные способы выхода пассажиров из лифта равновероятны, вычислить вероятность того, что все пассажиры выйдут:

а) на одном этаже;

б) на разных этажах:

в) на пятом?

Решение. В данной задаче испытание состоит в выходе трех пассажиров на каком-либо случайно выбранном этаже девятиэтажного дома. Определим общее число исходов данного испытания. Каждый пассажир может выйти на любом этаже, начиная со 2-го по 9-й. Для любого пассажира число таких способов равно 8. Тогда, по правилу произведения общее число способов выхода трех пассажиров из лифта равно $n = 8^3 = 512$.

а) Пусть событие A – *все пассажиры вышли на одном этаже*. Очевидно, что событию A благоприятствуют $m_A = 8$ случаев, так как все пассажиры могут выйти либо на 2-ом, либо на 3-ем, …, либо на 9-ом этаже. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{8}{8^3} = \frac{1}{8^2} = 0{,}015625.$$

б) Пусть событие B – *все пассажиры вышли на разных этажах*. Один из пассажиров может выйти на любом из 8 этажей. Тогда второй пассажир имеет возможность выйти на оставшихся 7 этажах, а последний – на 6

[7] Размещениями с повторениями из n элементов по m называются упорядоченные выборки с возвращением объема m. В отличие от размещений без повторений m может быть больше n, а элементы могут повторяться.

этажах. Таким образом, согласно правилу произведения, событию B будут благоприятствовать $m_B = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ случаев. Следовательно,

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{336}{512} = 0{,}65625.$$

в) Пусть событие C – *все пассажиры вышли на пятом этаже*. Очевидно, что событию C благоприятствует только один случай. Следовательно,

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{1}{8^3} = 0{,}001953125. \square$$

Пример 11. В ящике содержатся десять одинаковых деталей, три из которых бракованные. Какова вероятность того, что извлеченные случайным образом из ящика две детали будут бракованными?

Решение. Вероятность того, что первая взятая деталь будет бракованной (событие A), равна $P(A) = \frac{3}{10}$. После того как произошло событие A, в ящике осталось девять деталей, из которых две бракованные. Поэтому для события B, состоящего в извлечении второй раз бракованной детали, условная вероятность $P_A(B) = \frac{2}{9}$. Следовательно, вероятность появления двух бракованных деталей, согласно теореме умножения[8] вероятностей, равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}. \square$$

Пример 12. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$. Каждое из орудий производит по одному выстрелу. Найти:

а) вероятность попадания хотя бы одним из орудий;

б) вероятность попадания только из одного (не важно какого) орудия.

Решение. а) Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A –

[8] Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило. [4, стр. 37], [3, стр. 40]

попадание в цель из первого орудия, и B – *попадание в цель из второго орудия*, независимы. События совместны, ибо наступление одного из них не исключает появление другого.

Вероятность события AB – *оба орудия дали попадание*, согласно следствию для независимых событий[9] из теоремы умножения вероятностей, равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Искомая вероятность события $A+B$ – *попадание хотя бы одним из орудий*, согласно теореме сложения вероятностей для совместных событий[10], равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

б) Рассмотрим событие C – *мишень поражена только из одного орудия*. Очевидно, что $C = A\overline{B} + \overline{A}B$, где $\overline{B}$ и $\overline{A}$ – это события противоположные для B и A соответственно. События $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ несовместны, следовательно, по теореме сложения вероятностей для несовместных событий[11]

$$P(C) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B).$$

По свойству вероятностей противоположных событий[12] $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, а $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Далее применяя теорему умножения для независимых событий, получаем:

$$P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38. \square$$

Пример 13. Отправляясь на экзамен, два студента выучили только 15 из 20 экзаменационных билетов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: когда студент берет билет первым или вторым?

---

[9] Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей. [4, стр. 39], [3, стр. 42]

[10] Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления. [4, стр. 33], [3, стр. 44]

[11] Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. [4, стр. 30], [3, стр. 36]

[12] Сумма вероятностей противоположных событий равна единице. [4, стр. 30], [3, стр. 37]

Решение. Пусть событие A – первому *студенту достается выученный билет*, а событие B – *второй студент вытягивает выученный билет*. Очевидно, что $P(A)=\frac{15}{20}=0{,}75.$

Событие B может наступить при появлении одного из двух несовместных событий H_1 – *первый студент взял выученный билет* (это совпадает с событием A) и H_2 – *первый студент взял невыученный билет* (это совпадает с противоположным событием $\bar{A}$). Вероятности этих событий составляют соответственно $P(H_1)=\frac{15}{20}=0{,}75$ и $P(H_2)=\frac{5}{20}=0{,}25.$ Условные вероятности события B будут равны:

$$P_{H_1}(B)=\frac{14}{19} \text{ и } P_{H_2}(B)=\frac{15}{19}.$$

Тогда по формуле полной вероятности[13], получим:

$$P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{19}+\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{19}=\frac{57}{4\cdot 19}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Так как вероятности событий A и B одинаковы, то вероятность сдать экзамен одинакова.□

Пример 14. В условиях предыдущей задачи известно, что студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что он брал билет вторым?

Решение. По условию известно, что событие B наступило. Необходимо вычислить условную вероятность $P_B(H_2)$. По формуле Байеса[14], получим:

---

[13] Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа событий (гипотез), имеющих ненулевые вероятности, а A – произвольное событие. Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события A. [4, стр. 44], [3, стр. 51]

[14] Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа событий (гипотез), имеющих ненулевые вероятности, а A – произвольное событие. Тогда вероятность наступления любого из событий H_i, при условии что событие A наступило, равна $P_A(H_i)=\frac{P_{H_i}(A)\cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P_{H_j}(A)\cdot P(H_j)}$. [4, стр. 46], [3, стр. 52]

$$P_B\left(H_2\right)=\frac{P_{H_2}\left(B\right)\cdot P\left(H_2\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{15}{19}\cdot 0{,}25}{0{,}75}=\frac{5}{19}\approx 0{,}263.\square$$

Пример 15. В урну с четырьмя шарами опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из нее белый шар, если все предположения о первоначальном количестве белых шаров равновероятны?

Решение. Пусть *A – из урны извлечен белый шар*. В качестве гипотез, связанных с этим событием, можно рассмотреть все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров, т.е. *H_i – в урне первоначально содержалось i* $\left(i=0,1,2,3,4\right)$ *белых шаров*. Так как все предположения о первоначальном составе белых шаров равновероятны, то $P(H_i)=\frac{1}{5}=0{,}2$. Условные вероятности события *A* будут равны:

$$P_{H_0}(A)=\frac{1}{5}=0{,}2,\ P_{H_1}(A)=\frac{2}{5}=0{,}4,\ P_{H_2}(A)=\frac{3}{5}=0{,}6,$$

$$P_{H_3}(A)=\frac{4}{5}=0{,}8,\ P_{H_4}(A)=\frac{5}{5}=1.$$

Подставляя в формулу полной вероятности числовые значения вероятностей, получим:

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}2+\frac{1}{5}\cdot 0{,}4+\frac{1}{5}\cdot 0{,}6+\frac{1}{5}\cdot 0{,}8+\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}=0{,}6.\square$$

Пример 16. Студент приобрел пять лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету составляет 0,2. Найти вероятность того, что студент выиграет:

а) по трем лотерейным билетам;

б) не менее чем по трем билетам;

в) хотя бы по одному билету.

Определить наивероятнейшее число выигрышных билетов.

Решение. Испытание состоит в проверке билета на выигрыш. По условию число таких испытаний составляет $n=5$. В каждом испытании наступает или не наступает событие *A* – *проверяемый билет содержит выигрыш*. Очевидно, что наступление события *A* в каждом предыдущем испытании не изменяет его вероятности в последующих и, следовательно, испытания являются независимыми. При этом, вероятность наступления события *A* в каждом испытании постоянна и равна $p = 0{,}2$, и, таким образом, вероятность того, что событие *A* не наступит, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. На основании *вышесказанного* можно сделать вывод о том, что мы имеем дело с повторными независимыми испытаниями, и при решении задачи можно использовать формулу Бернулли[15].

а) Пусть событие *B* – *студент выиграл по трем лотерейным билетам*. Следовательно, число испытаний, в которых ожидается наступление события *A,* равно $m = 3$. Искомую вероятность найдем по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_{3,5} = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512 .$$

б) Пусть событие *C* – *студент выиграл не менее чем по трем лотерейным билетам*. Такому событию благоприятствуют три случая: событие *A* наступает три, четыре или пять раз. Все эти события несовместны, поэтому, согласно теореме сложения вероятностей несовместных событий, вероятность суммы несовместных событий будет равна сумме вероятностей каждого события, включенного в сумму, т.е. имеем:

$$P(C) = P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5} = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 =$$
$$= 10 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 + 5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2^5 = 0{,}05792 .$$

в) Пусть событие *D* – *студент выиграл хотя бы по одному лотерейному билету*. Выиграть хотя бы по одному билету означает выигрыш либо по одному, либо по двум, либо по трем, либо по четырем или, наконец, по пяти билетам, т.е. событие *D* представляет сумму всех этих несовместных

[15] **Формула Бернулли.** Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие *A* наступит *m* раз в *n* независимых испытаниях, равна $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$. [4, стр. 50], [3, стр. 68]

событий. Поэтому, здесь также можно было бы воспользоваться теоремой сложения вероятностей несовместных событий. Но достаточно большое число слагаемых делает расчет весьма громоздким, и чтобы избежать этого, проще перейти к противоположному событию $\bar{D}$ – *все билеты без выигрышей*. Для такого события число испытаний, в которых ожидается наступление события *A,* равно $m = 0$. На основании свойства вероятностей противоположных событий, вероятность искомого события будет равна:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_{0,5} = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67232 .$$

Наиболее вероятное число успехов m_0 удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$np - q \le m_0 \le np + p .$$

Если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: $m_{0,1} = np - q$ и $m_{0,2} = np + p$. Если $np + p$ – не целое число, то наивероятнейшее число равно $m_0 = [np + p]$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа *x*.

В нашем случае наивероятнейшее число выигрышных билетов будет равно:

$$m_0 = [np + p] = [5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2] = [1{,}2] = 1. \ \square$$

Пример 17. В экзаменационном билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7.

1. Составить закон распределения случайной величины – числа правильно решенных задач в билете. Построить полигон распределения.

2. Найти функцию распределения и построить ее график.

3. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение:

а) в промежутке $[1;\ 3)$;

б) не менее чем 0,5;

в) в промежутке $[1{,}5;\ 3]$.

4. Определить числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. 1. Рассмотрим случайную величину ξ – число правильно решенных задач в билете. Очевидно, что такая случайная величина может принимать следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3.

Для составления закона распределения вычислим соответствующие возможным значениям вероятности. Для этого введем следующие события. Пусть A_k – событие, состоящее в том, что студент правильно решит k-ую задачу $(k=1,2,3)$. Все эти три события являются независимыми в совокупности, вероятности которых по условию равны $P(A_1)=0{,}9$, $P(A_2)=0{,}8$ и $P(A_3)=0{,}7$. Соответственно, вероятности противоположных событий будут равны:

$$P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1\,,$$

$$P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2\,,$$

$$P(\bar{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}7=0{,}3\,.$$

Представим вероятности событий, состоящих в том, что случайная величина ξ принимает свои возможные значения, через введенные события следующим образом:

Событие $(\xi=0)$ означает, что студент все три задачи решил неправильно. Такое событие равносильно совместному наступлению трех событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ и $\bar{A}_3$, т.е. $(\xi=0)=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Учитывая независимость событий, получим:

$$P(\xi=0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006\,.$$

Событие $(\xi=1)$ соответствует тому, что студент правильно решил только одну (неважно какую) из трех предложенных задач. Это означает, что он правильно решил либо только первую задачу, либо только вторую, либо только третью, т.е. это событие можно представить в виде суммы трех несовместных событий:

$$(\xi=1)=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

На основании теоремы сложения несовместных событий и теоремы умножения независимых событий, найдем вероятность этого события:

$$P(\xi=1)=P\left(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P(A_2)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}092.$$

Аналогично вычисляем вероятность события $(\xi=2)$:

$$P(\xi=2)=P\left(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3\right)=P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)+P\left(A_1\bar{A}_2A_3\right)+P\left(\bar{A}_1A_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P(A_1)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P(A_3)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}398.$$

И, наконец, вероятность события $(\xi=3)$ будет равна:

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

Итак, запишем закон распределения в виде таблицы:

ξ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверим выполнение основного свойства закона распределения:

$$0{,}006+0{,}092+0{,}398+0{,}504=1.$$

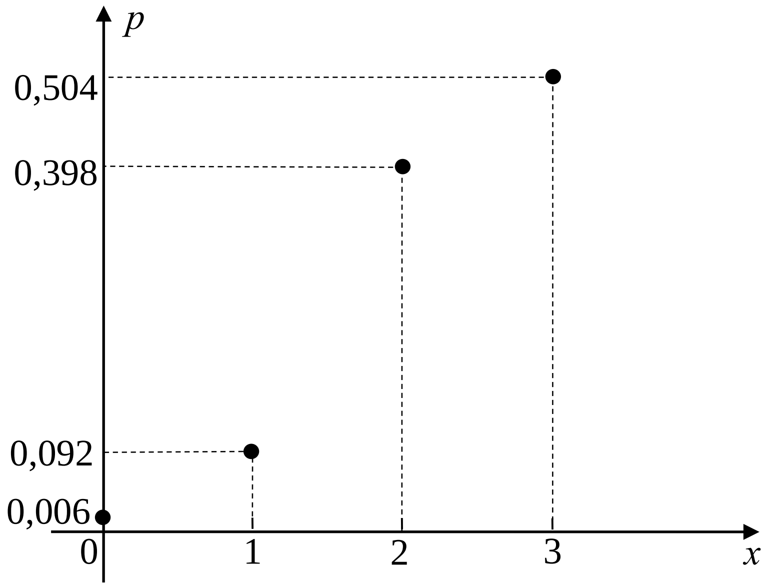


Рис. 2

Для построения полигона распределения вероятностей дискретной случайной величины, соответствующего полученному закону распределения, в прямоугольной системе координат *Oxp* отмечаем четыре точки с координатами (x_i, p_i) (рис. 2).

2. Построим функцию распределения[16]. Из вида закона распределения дискретной случайной величины ξ вытекает, что ее четыре возможных значения разбивают числовую ось на пять промежутков (рис. 3).

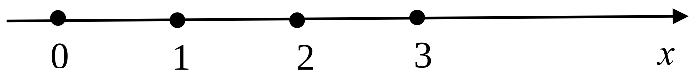


Рис. 1.3

Найдем функцию распределения на каждом из них.

• Для любого *x*, принадлежащему промежутку $(-\infty, 0]$, по определению функции распределения следует, что

$$F(x) = P(\xi < x) = 0,$$

ибо событие $(\xi < x \leq 0)$ является невозможным, так как строго левее произвольного числа *x* (даже для самого большого из рассматриваемого промежутка, равного нулю) нет ни одного возможного значения случайной величины ξ.

• Далее берем следующий промежуток. Если $0 < x \leq 1$, то для таких значений аргумента *x* неравенству $\xi < x$ удовлетворяет только одно возможное значение $\xi = 0$. Следовательно, событие $(\xi < x)$ состоит в том, что случайная величина ξ принимает значение, равное нулю и, таким образом, справедливо соотношение

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) = 0{,}006.$$

• Если $1 < x \leq 2$, то левее произвольного числа *x* из данного промежутка на числовой оси окажутся уже два возможных значений случайной величины

[16] Функцией распределения случайной величины называется такая функция *F*(*x*), значение которой в точке *x* численно равно вероятности того, что в произвольном испытании значение случайной величины окажется меньше чем *x*. [4, стр. 69], [3, стр. 107]

ξ, равные 0 и 1. Поэтому событие $(\xi < x)$ наступает, если произойдет любое из событий: $(\xi = 0)$ или $(\xi = 1)$. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}006 + 0{,}092 = 0{,}098.$$

• При $2 < x \le 3$ неравенству $\xi < x$ удовлетворяют уже три возможных значения случайной величины ξ, равные 0, 1 и 2, поэтому:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 = 0{,}496.$$

• На последнем промежутке $x > 3$ все возможные значения случайной величины ξ, будут меньше любого *x*, и, таким образом, событие $(\xi < x)$ будет достоверным событием Ω. На основании этого, можно записать:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\Omega) = 1.$$

Итак, резюмируя все вышесказанное, функцию распределения запишем в следующем виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}006 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}098 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}496 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Функция распределения, соответствующая условиям рассмотренного примера, представляет собой кусочно-непрерывную функцию, а ее график имеет ступенчатый вид (рис. 4). Из вида функции распределения и ее графика видно, что функция распределения дискретной случайной величины в промежутках между ее возможными значениями не изменяется. В точках, отвечающих возможным значениям, данная функция имеет разрывы первого рода, совершая скачки, которые равны вероятностям соответствующих возможных значений.

3. а) Вероятность события $(1 \le \xi < 3)$ найдем на основании свойства функции распределения, заключающегося в том, что:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$$

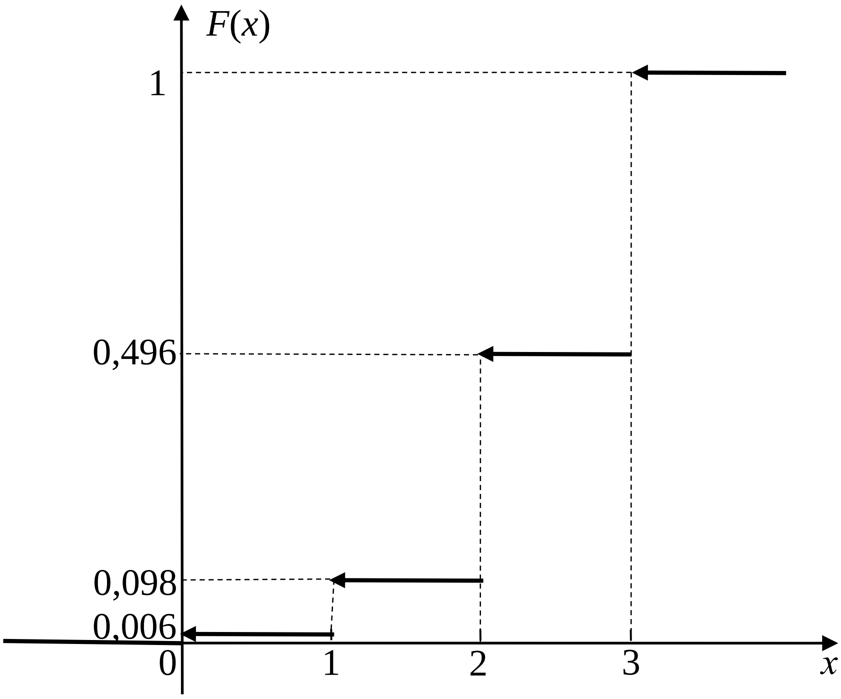


Рис. 4

Следовательно, $P(1 \le \xi < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}496 - 0{,}006 = 0{,}49$.

Действительно, двойному неравенству $1 \le \xi < 3$ удовлетворяют только два возможных значения случайной величины: 1 и 2. Следовательно, событие $(1 \le \xi < 3)$ равносильно тому, что случайная величина ξ принимает возможные значения либо 1, либо 2, сумма вероятностей которых равна 0,49.

б) Так как $(\xi \ge x)$ и $(\xi < x)$ – противоположные события, то их вероятности связаны соотношением:

$$P(\xi \ge x) = 1 - P(\xi < x).$$

Далее, используя определение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$, получим:

$$P(\xi \ge 0{,}5) = 1 - P(\xi < 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

в) Обратим внимание на то, что для дискретной случайной величины непосредственно применить формулу, используемую в пункте а), к промежутку $1{,}5 \le \xi \le 3$ нельзя, ибо правая граница входит в данный промежуток. Поэтому, событие $(1{,}5 \le \xi \le 3)$ представим как сумму двух несовместных событий $(1{,}5 \le \xi < 3)$ и $(\xi = 3)$. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий и указанного выше свойства функции распределения, получим:

$$P(1{,}5 \le \xi \le 3) = P(1{,}5 \le \xi < 3) + P(\xi = 3) = F(3) - F(1{,}5) + P(\xi = 3) =$$
$$= 0{,}496 - 0{,}098 + 0{,}504 = 0{,}902.$$

4. Найдем числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Согласно определению математического ожидания дискретной случайной величины, получим:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4\,.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся свойством дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi\,.$$

Таким образом, необходимо найти математическое ожидание квадрата случайной величины $M\xi^2$, которое определяем по формуле:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0{,}006 + 1^2 \cdot 0{,}092 + 2^2 \cdot 0{,}398 + 3^2 \cdot 0{,}504 = 6{,}22\,.$$

Тогда

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = 6{,}22 - 2{,}4^2 = 0{,}46\,.$$

Среднее квадратическое отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии, т.е.:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}678\,. \ \square$$

Пример 18. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого равна 0,6, для второго 0,8. Составить закон распределения случайной величины ξ – общего числа попаданий в мишень.

Решение. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2 (0 – оба не попали, 1 – попал только один стрелок, 2 – оба попали). Введем события B_1 и B_2, состоящие соответственно в попадании в мишень первого и второго стрелков. Вычислим вероятности следующих событий:

$$P(\xi=0)=P(\overline{B_1}\cdot\overline{B_2})=P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)=(1-0{,}6)\cdot(1-0{,}8)=0{,}4\cdot0{,}2=0{,}08,$$

$$P(\xi=1)=P(B_1\cdot\overline{B_2}+\overline{B_1}\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(\overline{B}_2)+P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)=0{,}6\cdot0{,}2+0{,}4\cdot0{,}8=0{,}44,$$

$$P(\xi=2)=P(B_1\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=0{,}6\cdot0{,}8=0{,}48.$$

Окончательно, закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ:

x_i	0	1	2	Σ
p_i	0,08	0,44	0,48	1

□

Пример 19. В коробке 3 белых шара и 2 красных. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа белых шаров среди 2-х извлеченных.

Решение. Случайная величина ξ может принимать следующие значения: ξ = 0, если все извлеченные шары будут красными, ξ = 1, если шары будут разного цвета и ξ = 2, если оба шара белые. Используя классическое определение вероятности и элементы комбинаторики, определим необходимые вероятности:

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}=0{,}1;$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\frac{2\cdot3}{10}=0{,}6;$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Таким образом, закон распределения будет иметь вид:

ξ:

x_i	0	1	2	Σ
p_i	0,1	0,6	0,3	1

□

Пример 20. В коробке 3 белых и 2 красных шара. Шары извлекаются последовательно до появления белого шара. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа извлеченных шаров.

Решение. Из коробки последовательно извлекаются шары. Если первый извлеченный шар белый, то процесс извлечения прекращается. Если же извлеченный первый шар будет красным, то извлекается второй шар. Второй шар может быть как красным, так и белым. Если второй шар белый, то процесс извлечения также прекращается, а если красный, то извлекаем еще один шар. Последний шар обязательно будет белым, так как в коробке было только два красных шара, которые уже извлечены. Таким образом, возможные значения данной случайной величины: 1, 2, 3.

Найдем вероятности, с которыми случайная величина ξ принимает свои возможные значения. Событие (ξ = 1) наступает тогда и только тогда, когда первый из шаров оказывается белым, т.к. появление именно белого шара является сигналом к прекращению последующих извлечений. Поэтому

$$P(\xi = 1) = P(Б_1) = \frac{3}{5},$$

где событие $Б_1$ – *первый из извлеченных шаров – белый*.

Событие (ξ = 2) (из коробки будет извлечено ровно 2 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров оказывается красным, а второй – белым. Поэтому

$$P(\xi = 2) = P(К_1 Б_2) = P(К_1) P_{К_1}(Б_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

где событие $К_1$ – *первый из извлеченных шаров – красный*, $Б_2$ – *второй шар – белый*. Наконец событие (ξ = 3) (из коробки будет извлечено 3 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый шар – красный, второй – красный, а третий – белый. Обозначив через $К_2$ – *второй из извлеченных шаров – красный*, получим

$$P(\xi = 3) = P(К_1 К_2 Б_3) = P(К_1) P_{К_1}(К_2) P_{К_1 К_2}(Б_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}.$$

Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

ξ:

x_i	1	2	3	Σ
p_i	0,6	0,3	0,1	1

□

Пример 21. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа попаданий в мишень.

Решение. Возможные значения для числа попаданий: 0, 1, 2, 3. Вероятности того, что случайная величина ξ примет эти значения вычисляются по формуле Бернулли при $n=3,\ \ p=0{,}8,\ \ q=0{,}2$:

$$P(\xi=0)=P_{0,3}=C_3^0p^0q^3=1\cdot1\cdot0{,}2^3=0{,}008,$$

$$P(\xi=1)=P_{1,3}=C_3^1p^1q^2=3\cdot0{,}8\cdot0{,}2^2=0{,}096,$$

$$P(\xi=2)=P_{2,3}=C_3^2p^2q^1=3\cdot0{,}8^2\cdot0{,}2^1=0{,}384,$$

$$P(\xi=3)=P_{3,3}=C_3^3p^3q^0=1\cdot0{,}8^3\cdot0{,}2^0=0{,}512.$$

Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

ξ:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512	1

Полученный закон распределения является частным случаем *биномиального закона распределения* при $n=3,\ \ p=0{,}8.$ □

Примеры тестовых заданий

1. Пусть A – случайное событие. Чему равно событие $A+\overline{A}$?

Ответы: 1) A;

2) $\overline{A}$;

3) достоверное событие;

4) невозможное событие.

2. Если наступление одного события исключает наступление другого, то события называются:

Ответы: 1) несовместными;

2) совместными;

3) независимыми;

4) зависимыми.

3. В урне 4 черных и 3 белых шара. Наудачу вынимают один шар. Пусть событие A состоит в том, что вынули белый шар, а событие B – вынули черный шар. Какие из следующих утверждений верны?

Ответы: 1) события A и B несовместны;

2) события A и B противоположны;

3) события A и B равновозможны;

4) события A и B независимы.

4. Число X выбирают наудачу из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Укажите, какие из перечисленных событий составляют полную группу событий.

Ответы: 1) $A = (X = 1)$;

2) $B = (X = 2)$;

3) $C = (X = 3)$;

4) D – «число X делится на 2»;

5) E – «X – простое число».

5. Какими из перечисленных свойств **не** могут обладать события A и B, если их вероятности равны соответственно 0,6 и 0,3.

Ответы: 1) образуют полную группу событий;

2) несовместны;

3) противоположны;

4) совместны.

6. Если наступление события B влечет за собой наступление события A, то $P(A \cdot B)$ равна:

Ответы: 1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) 0; 4) 1.

7. Вероятности событий A и B равны соответственно 0,3 и 0,4. Чему равна вероятность их суммы, если вероятность их произведения 0,1?

8. В зоопарке два страуса из 6 имеют рост более 2,5 м. На выездную выставку случайным образом выбирают трех страусов. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один с ростом более 2,5 м?

9. В урне 4 красных, один белый и один синий шар. Из урны извлекают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что извлеченные шары будут разных цветов.

10. Игральную кость подбросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее пяти очков?

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{3}$.

11. На шести карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. После перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают по порядку. Найти вероятность того, что при этом получится слово «МОСКВА»

Ответы: 1) $\frac{1}{46656}$; 2) $\frac{1}{360}$; 3) $\frac{1}{720}$; 4) $\frac{1}{120}$.

12. Некто забыл последние две цифры телефонного номера, но помнит, что они нечетные и различные. Какова вероятность того, что он сразу наберет нужный номер, если будет набирать эти цифры случайно?

13. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, а второй с вероятностью 0,8. Каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Какова вероятность того, что один из них промахнулся?

14. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 11 очков.

Ответы: 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{11}$; 4) $\frac{11}{36}$.

15. Игральную кость подбросили один раз. Рассмотрим два события: A – «выпало четное число очков», B – «выпало 3 очка». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0; 4) 1.

16. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны извлекают последовательно два шара. Рассмотрим два события: A – «первый извлеченный шар – белый», B – «второй извлеченный шар черный». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{4}{7}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{7}$.

17. Монету подбросили два раза. Рассмотрим два события: A – «выпали два орла», B – «второй раз выпал орел». Найти условную вероятность $P(A|B)$.

18. Подбросили две игральные кости. Рассмотрим два события: A – «сумма выпавших очков менее 4», B – «сумма выпавших очков равна 3». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 0; 4) 1.

19. В группе 4 отличника, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо студентов. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. На экзамен наугад приглашается один студент. Какова вероятность того, что он получит хорошую оценку?

20. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель 0,85. Какова вероятность того, что отобранная для проверки пара отремонтирована качественно?

Ответы: 1) 0,42; 2) 0,87; 3) 0,78; 4) 0,75.

21. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 2% брака, второй 3% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом, если с первого автомата поступило 1000 деталей, а со второго 2000.

Ответы: 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,18; 4) 0,25.

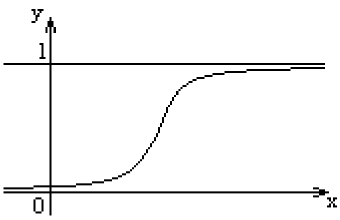
22. Всхожесть семян составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдет только одно.

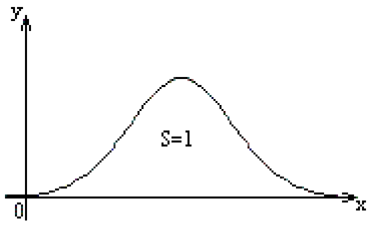
23. Найти $P(\xi = 2)$, если закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

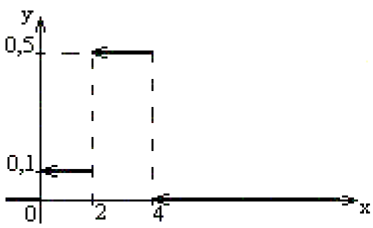
x_i	-1	2	3
p_i	0,2	?	0,7

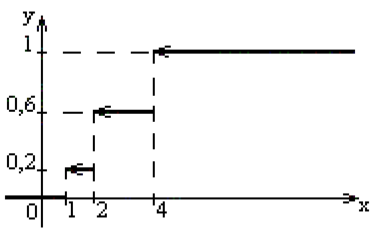
24. Укажите рисунки, на которых изображены функции распределения случайных величин.

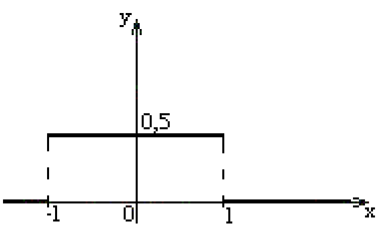
Ответы:

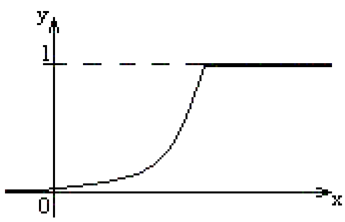
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

25. Функция распределения случайной величины ξ изображена на рис.5. Укажите значения вероятностей случайной величины ξ в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$P(\xi=0)=$						
$P(\xi=1)=$						
$P(\xi=2)=$						
$P(\xi=3)=$						

26. Найти вероятность $P(1{,}5 \le \xi \le 3{,}5)$, если функция распределения случайной величины ξ изображена на рис. 6.

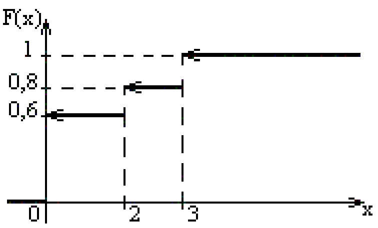


Рис. 5

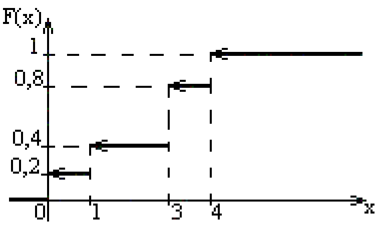


Рис. 6

27. Закон распределения случайной величины ξ дан в табл. 1. Укажите значения функции распределения случайной величины ξ в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,1	0,3	0,4	0,5	1
$F(-2)=$						
$F(0)=$						
$F(2{,}5)=$						
$F(5)=$						

28. Найти вероятность $P(2 < \xi < 5)$, если закон распределения случайной величины ξ дан в табл. 2.

Табл. 1

x_i	–1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Табл. 2

x_i	1	3	4
p_i	0,1	0,4	0,5

29. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, а второй с вероятностью 0,5. Каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Пусть случайная величина ξ равна числу промахов. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$P(\xi=0)$ =						
$P(\xi=1)$ =						
$P(\xi=2)$ =						
$P(\xi=3)$ =						

30. В коробке 2 синие и 3 красные ручки. Преподаватель извлекает три ручки. Пусть случайная величина ξ равна числу извлеченных красных ручек. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8
$P(\xi=0)$ =						
$P(\xi=1)$ =						
$P(\xi=2)$ =						
$P(\xi=3)$ =						

31. Найти математическое ожидание случайной величины, если ее закон распределения дан в табл. 1.

32. Математическое ожидание случайной величины ξ равно 3,3. Найти дисперсию этой случайной величины, если ее закон распределения дан в табл. 2.

33. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,05. Найти математическое ожидание $M(2\xi - 0{,}5)$, если случайная величина ξ равна числу выигрышных билетов среди 15 купленных.

34. Ветеринар в зоопарке обследует 5 жирафов. Вероятность того, что рост жирафа будет больше 6 метров, равна 0,1. Найти дисперсию $D(2\xi - 4)$, если случайная величина ξ равна числу обследованных жирафов с ростом более 6 метров.

35. Найти математическое ожидание $M(2\xi+3)$, если случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения от 0 до 5 с вероятностями:

$$P(\xi = m) = C_5^m \cdot 0{,}1^m \cdot 0{,}9^{5-m}.$$

Значения функции Пуассона $\qquad P_\lambda(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Потемкин А.В., Фридман М.Н., Эйсымонт И.М. *Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие.* М.: Финансовый университет, 2015.
2. Потемкин А.В., Эйсымонт И.М. *Анализ данных: учебное пособие*. – М.: Финансовый университет, 2014.
3. Кремер Н.Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.: ЮНИТИ, 2003, 2004, 2007.
4. Геворкян П.С. *Теория вероятностей и математическая статистика: Курс лекций*/ П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт.— М.: Экономика, 2012.

Дополнительная

5. Браилов А.В., Солодовников А.С. *Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Часть 3. Теория вероятностей*. М.:Финансы и статистика, 2010.
6. Денежкина И.Е., Орлова М.Г., Швецов Ю.Н. *Основы математической статистики. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы бакалавров.* М.: Финансовая академия при правительстве РФ, 2010.
7. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. *Математика в экономике. Учебник в 3 ч. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Финансы и статистика, 2008.

Ресурсы информационно-коммуникационной сети «Интернет»

1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации http://portal.ufrf.ru/.

2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. http://fa.ru/dep/data_analysis/

3. Библиотечно – информационный комплекс Финуниверситета при Правительстве РФ. http://library.fa.ru.

4. Репозиторий Финуниверситета при Правительстве РФ. http://repository.vzfei.ru.

5. Компьютерная обучающая программа для студентов 1 курса по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» (КОПР2); зарегистрирована в Информационно-библиотечном фонде РФ, рег. №50200000053 от 08.06.2000. Дата обновления 06.12.2010. (http://repository.vzfei.ru). Доступ по логину и паролю.