Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финуниверситет)

Самарский финансово-экономический колледж
(Самарский филиал Финуниверситета)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по учебно-методической работе
_________________Л.А Косенкова
« 21 » февраля 20 22 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 09.02.07 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Самара – 2022

Методические указания по организации и выполнению практических занятий разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Элементы высшей математики» и в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного приказом Министерства образования науки Российской Федерации от 09.12.2016 года № 1547
Присваиваемая квалификация: администратор баз данных

Разработчики:

Буслаева Е.П. ____________________ Преподаватель Самарского филиала Финуниверситета

Методические указания по организации и выполнению практических занятий рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании предметной (цикловой) комиссии естественно-математических дисциплин

Протокол от «24» января 2022 г. № 5

Председатель ПЦК ____________________ М.В. Писцова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий по предмету ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны для студентов второго курса специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и преподавателям по организации практических занятий по изучаемой дисциплине, в соответствии с требованиями федерального государственного стандарта среднего профессионального образования.

Методические разработка включает в себя краткие теоретические сведения, указания по выполнению практических работ, контрольные вопросы, формы контроля.

В соответствии с учебным планом на практические занятия для студентов отводится 28 часов.

Перечень практических занятий соответствует рабочей программе по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики.

Методические указания выполняют функцию управления самостоятельной работой обучающегося, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оборудования занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

Методические указания направлены на формирование и развитие у студентов общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, применять стандарты антикоррупционного поведения.

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

Целью изучения дисциплины является воспитание достаточно высокой математической культуры, привитие навыков современных методов математического моделирования в практической деятельности, приобретение студентом математического фундамента как средства изучения окружающего мира для успешного освоения дисциплин естественно-научного и профессиональных циклов.

В результате изучения дисциплины обучающийся **должен**

приобрести практический опыт: выполнение операций над матрицами и решение систем линейных уравнений; решение задач, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости, применение методов дифференциального и интегрального исчисления.

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на

плоскости;

– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
– решать дифференциальные уравнения;
– пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

знать:

– основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
– основы дифференциального и интегрального исчисления;
– основы теории комплексных чисел.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем в часах
Объем образовательной программы учебной дисциплины	96
Объем работы обучающихся во взаимодействии с преподавателем	72
в том числе:	
теоретическое обучение	42
практические занятия	30
самостоятельная работа	12
Промежуточная аттестация в форме экзамена	12
В т.ч. консультации	2
экзамен	10

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1.Замечательные пределы, раскрытие неопределённостей.

Практическое занятие №2. Производные и дифференциалы высших порядков.

Практическое занятие №3. Вычисление определённых интегралов. Применение определенных интегралов.

Практическое занятие № 4. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных.

Практическое занятие №5. Вычисление интегралов.

Практическое занятие №6. Исследование сходимости рядов.

Практическое занятие №7. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Практическое занятие №8. Действия над матрицами.

Практическое занятие №9. Обратная матрица. Ранг матрицы

Практическое занятие №10. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Практическая работа № 11. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

Практическое занятие №12. Приложения скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

Практическое занятие № 13. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Практическое занятие №14. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Замечательные пределы, раскрытие неопределённостей.

Цель занятия:

– применить умения по вычислению пределов и раскрытию неопределенностей, используя принцип замены эквивалентными, I и II замечательные пределы.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.;
– калькулятор простой.

<u>Задание:</u>

I Вариант

Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tgx}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x^2}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{x}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{-x}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5}x}$;
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+0,5}$.

II Вариант

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin 6x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}xctgx$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cos 2x}{x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{x}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 4x}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{4}{5}x}$;
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Пояснения к работе (учебный материал):

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ - 1-й замечательный предел.

Следствие.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ ax}{ax}=1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ ax}{\sin bx}=\frac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ ax}{tgbx}=\frac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{sinax}=1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{tg\ ax}=1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\ ax}{bx}=\frac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ ax}{bx}=\frac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ ax}{bx}=\frac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\arcsin bx}=\frac{a}{b}.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ – 2-й замечательный предел.

Следствие 1.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$

Следствие 2.

Сделаем замену: $\frac{1}{x}$ = y => $x=\frac{1}{y}$. Тогда при $x\to\infty$, $y\to 0$.

Две бесконечно малые величины $\boldsymbol{\alpha}(x)$ называются эквивалентными (или равносильными) при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$

Таблица эквивалентных величин (всюду $x\to 0$)

$sin\sim x$

$arcsin\ x\sim x$

$tg\ x\sim x$

$arctg\ x\sim x$

$e^x-1\sim x$

$ln(1+x)\sim x$

$a^x\sim x\ ln\ a$, $a\neq 1$, $a>0$

$log_a(1+x)\sim\frac{x}{ln\,a}, a\neq 1, a>0$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\boldsymbol{\alpha}x$, $\boldsymbol{\alpha}\in R$

$1\text{-}\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot tg\ 3x = \lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sin\ 8x}{x} = \left(\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{10x}{2}\cos\left(\frac{-6x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 5x\cos(-3x)}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \cos(-3x) = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = |x = 3y| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} = \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^3 = e^3.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^x = \left|x = \frac{4}{3}y\right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{4}{3}y} = e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3}.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0} = (1-3x)^{\frac{2}{x}} = \left|\begin{array}{l} -3x = y, \frac{x}{2} = \frac{2}{-\frac{1}{3}y} = -\frac{6}{y} \\ x = -\frac{1}{3}y, \\ \text{При } x\to 0, y\to 0 \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{6}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-6} = e^{-6}.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-5}{4x-3}\right)^{3x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(4x-3)-2}{4x-3}\right)^{3x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{4x-3}\right)^{3x-5} =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} -\frac{2}{4x-3}=\frac{1}{y}, & 3x+5=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}y+5= \\ 4x-3=-2y, & =\frac{29}{4}-\frac{3}{2}y. \\ 4x=3-2y, & \\ x=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}y, & \\ при\ x\to\infty, \quad y\to\infty & \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{29}{4}-\frac{2}{3}y}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{29}{4}}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}y}=1\cdot\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\left(e^{3x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim\frac{e^{3x}-1}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=1-3=-2.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Какие неопределённости вы знаете?

2. Назовите 1-й замечательный предел.

3. Назовите второй замечательный предел.

Практическое занятие №2. Производные и дифференциалы высших порядков.

Цель занятия:

– проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, обратных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная и обратная функция.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

1. *Основной теоретический материал*

Производной функции $f(x)$ ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, при Δx стремящемся к нулю.

Правила дифференцирования

1) $(f+g)'=f'+g'$
2) $(f-g)'=f'-g'$
3) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	*Сложные функции*

1) $C' = 0$	1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2) $(x)' = 1$	2) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$	3) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
4) $(kx+b)' = k$	4) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	5) $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	6) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	7) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8) $(a^x)' = a^x \ln a$	8) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9) $(e^x)' = e^x$	9) $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
10) $(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$	10) $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
11) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12) $(\sin x)' = \cos x$	12) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13) $(\cos x)' = -\sin x$	13) $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14) $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	14) $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
16) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
17) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
18) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
19) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

2. *Решение типовых заданий:*

Пример 1. Найти значение производной функции $y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$y' = (\sin(4x - \frac{\pi}{6}))' = (4x - \frac{\pi}{6})' \cdot \cos(4x - \frac{\pi}{6}) = 4\cos(4x - \frac{\pi}{6})$

$y'(\frac{\pi}{12}) = 4\cos(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Ответ: $2\sqrt{3}$

Пример 2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найти значение производной функции при $y'(-1)$.

Решение: Найдем производную данной функции: $y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$. Ответ:14

Пример 3. Найти производную данной функции $y = \ln x \cdot \cos x$.

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:

$y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$.

Пример 4. Найти производную данной функции $y = \frac{x^3}{\cos x}$.

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:

$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$

3. *Задания*:

1) Найдите производные функций:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$
2) $y = x^7 - 4x^{15} - 3x^2 + 5$
3) $y = x^2 \cdot (3x^2 + 2)$
4) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 5)$
5) $y = (x^2 - 7)(x^7 + 4)$
6) $y = \frac{x^9}{x - 3}$

7) $y=\left(x+4x^{7}\right)\cdot x^{3}$ 8) $y=x^{6}\cdot(8x-16)$ 9) $y=\dfrac{2+7x^{2}}{x^{3}}$

10) $y=x^{3}\cdot(2x+1)$ 11) $y=\left(2x^{5}-6x\right)\cdot x^{3}$ 12) $y=\dfrac{2x^{3}-1}{x}$

2) Найдите значения производных функций $f\,'(2)$; $g'(1)$; $h'(0)$, если $f(x)=x^{2}+3x^{3}-4$; $g(x)=\dfrac{x-2}{2+x}$; $h(x)=(3x+2)\cdot x^{2}$.

3) Найдите значения производных функций $f\,'(2)$; $g'(1)$; $h'(0)$, если $f(x)=-x^{3}+12x^{2}-x+121$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $h(x)=x\cdot\left(x^{3}+9\right)$.

4. ***Содержание отчёта***

Отчёт должен содержать:

1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***

1. Дайте определение производной функции.
2. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования.
3. Каков геометрический смысл производной?

Практическое занятие №3. Вычисление определенных интегралов. Применение определенных интегралов

Цель занятия:

– сформировать навыки нахождения определенного интеграла различными способами; уметь применять навыки вычисления интегралов при решении прикладных задач.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;

– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы Апо теме практического занятия:

Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

Определение. Если существует конечный передел интегральной суммы (8)

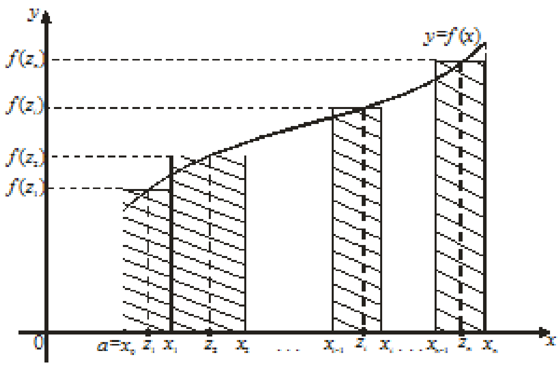
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \text{ - (8)}$$

при $\lambda\to 0$, не зависящий от способа разбиения τ_n отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называют определенным интегралом (или интегралом Римана) от функции f(x) на отрезке [a; b] и обозначают: $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Если указанный предел существует, то функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [a; b] (или интегрируемой по Риману). При этом f(x)dx называется подынтегральным выражением, f(x) – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, в случае, когда диаметр разбиения λ стремится к нулю.

Геометрический смысл определенного интеграла. Пусть функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и f(x) ≥ 0. Фигура, ограниченная графиком AB функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и осью Ox (рис. 1), называется криволинейной трапецией.



Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, а сумма $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (изображенной на рис. 1). Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора точек ξ_k.

Чем меньше Δx_k, k=1, n, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы при λ→0:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Основные свойства определенного интеграла.

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны (a=b), то интеграл равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

   Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если f(x)=1, то $\int_a^b dx = b - a.$

   Действительно, так как f(x)=1, то $\int dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на [a; b] функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6 (аддитивность определенного интеграла). Если существует интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx,$ то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, b, c; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

7. Если $f(x) \geq 0$ $\forall x \in$ [a; b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0,$ a < b.

8 (определенность определенного интеграла). Если интегрируемые функции f(x) и φ(x) удовлетворяют неравенству f(x) ≥ φ(x) $\forall x \in$ [a; b], то

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx,$ a >b.

9 (об оценке определенного интеграла). Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b], то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$ a < b.

10 (теорема о среднем). Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то существует такая точка $\xi \in$ [a; b], что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$

т. е. определенный интеграл от переменной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования [a; b] и длины b-a этого отрезка.

Теорема о среднем.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то существует такая точка $\xi \in$ [a; b], что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$

т. е. определенный интеграл от переменной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования [a; b] и длины b-a этого отрезка.

Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы x є [a; b], то величина интеграла будет изменяться. Интеграл вида: $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, x є [a; b], называется определенным интегралом с переменным верхним пределом и является функцией верхнего предела x. Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

Теорема. Производная определенного интеграла от непрерывной функции f(x) по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела: $\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)'x = f(x).$

Формула Ньютона-Лейбница. Формула Ньютона-Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: значение определенного интеграла на отрезке [a; b] от непрерывной функции f(x) равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при x=b и x=a.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \ \text{- (9)}$$

Примеры. Вычислить интегралы

1. $\int\limits_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$
2. $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{27}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$
3. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$

Вопросы для закрепления теоретического материала
к практическому занятию:

1. Свойства определенного интеграла
2. Интегрирование заменой переменной (алгоритм)
3. Какие интегралы находятся интегрированием по частям?
4. Алгоритм интегрированием по частям.
5. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?
6. Что называют определенным интегралом функции f(x)?
7. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
8. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции f(x) на отрезке [a,b].
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции f(x) на отрезке [a, b].
10. Запишите свойства определенного интеграла.
11. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Задания для практического занятия:

Задание: Вычислить определенный интеграл, методом непосредственного интегрирования используя формулу Ньютона-Лейбница.

1. $a)\int_{1}^{2}\left(3x^2-2x\right)dx$ $\quad b)\int_{\Pi}^{2\Pi}\frac{\cos x}{6}dx$

2. $a)\int_{-2}^{1}\left(x^2-x\right)dx$ $\quad b)\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6}\frac{6dx}{cos^2 2x}$

3. $a)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos x dx$ $\quad b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

4. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{\cos^2 x}dx$ $\quad b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

5. $a)\int_{1}^{2}\left(4x^3+2x\right)dx$ $\quad b)\int_{0}^{\Pi}\frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\Pi}{3})}$

6. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos 2x\right)dx$ $\quad b)\int_{1}^{5}\sqrt{9x-1}dx$

7. $a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(6\sin 2x\right)dx$ $\quad b)\int_{1}^{2}(3-2x)^4 dx$

11. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{\cos^2\frac{1}{2}x}dx$ $\quad b)\int_{2}^{3}(1-x)^4 dx$

12. $a)\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\frac{1}{3}x dx$ $\quad b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

13. $a)\int_{2}^{3}\left(3x^2-2x\right)dx$ $\quad b)\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2}3\sin x dx$

14. $a)\int_{0}^{\pi}\left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$ $\quad b)\int_{1}^{0}(1-2x)^4 dx$

15. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(36\cos 2x\right)dx$ $\quad b)\int_{-2}^{3}\frac{2dx}{(3-x^2)}dx$

16. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx$ $\quad b)\int_{2}^{3}(1-2x)^4 dx$

17. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{36}{\cos^2 2x}dx$ $\quad b)\int_{2}^{3}(3-x^2)dx$

21. $a)\int_{1}^{2}\left(4x^3-3x^2\right)dx$ $\quad b)\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

22. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\left(2\cos 3x\right)dx$ $\quad b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

23. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}\left(108\sin 6x\right)dx$ $\quad b)\int_{-1}^{1}(7-5x)dx$

24. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{4}{\cos^2 2x}dx$ $\quad b)\int_{-2}^{1}(4x^3+6x)dx$

25. $a)\int_{1}^{2}\left(5x^4-6x^2\right)dx$ $\quad b)\int_{1}^{9}\sqrt{8x-5}dx$

26. $a)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\sin^2 x}dx$ $\quad b)\int_{-2}^{0}(x^5-3x^2)$

27. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sin x\right)dx$ $\quad b)\int_{1}^{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3})dx$

8. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-3}^{1} \frac{dx}{5-3x}$

18. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x\right)dx$

$b)\int_0^{4} (x^2+1)dx$

28. $a)\int_1^{3} \left(3x^2+4x^3\right)dx$

$b)\int_{\Pi/4}^{\Pi/8} \frac{\cos 4x}{2}dx$

9. $a)\int_0^{2} \left(x^3-x^2+3\right)dx$

$b)\int_1^{2} e^{2x+3}dx$

19. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

$b)\int_2^{3} (7-2x)^4 dx$

29. $a)\int_2^{3} \left(2x^3-2x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/6} \frac{4dx}{\cos^2 2x}$

10. $a)\int_1^{2} \left(x^4-x^3+2\right)dx$

$b)\int_0^{1} 5^{4-3x}dx$

20. $a)\int_0^{2} \left(x^3-x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/3} 3\sin 3x dx$

30. $a)\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \left(2\sin 3x\right)dx$

$b)\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+4}$

Задание: Вычислить площади фигур с помощью определенного интеграла (номер варианта совпадает с номером студента по списку)

1. $y = 8x - x^2 - 7$ и осью ох

2. $y = x^3 - 1$, y = 0, x = 0

3. $y = x^2 - 3x - 4$ и осью ох

4. $y^2 = 4x$ *и* $x^2 = 4y$

5. $y = 5x - x^2 + 6$ и осью ох

6. $y = x^3$, $y = x^2$, x = −1,
x = 0

7. $y = x^2 - 6x + 8$ и осью ох

8. $y = x^2$ и $y = x + 2$

9. $y = x^2 - 4x - 5$ и осью ох

10. y = 6x −3x^2 и осью ох

11. $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

12. y = x^2 и $y = 2 - x^2$

13. $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$

14. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$,
x = 0, x =2

15. $y = \ln x$, x =e , y =0

16. $y = \frac{4}{x^2}$, x =1, y = x –

17. $y = x^2 + x$, $y = 1 - x^2$,
x = 0 , x = 1

18. $y = x^3$, x = 2

19. $y = \cos x$, x = 0,
x = 2π, y = 0

20. y = $\sqrt{x}$, y = 2, x = 0

21. y = x − y + 3,
x + y −1= 0, y = 0

22. 2x − 3y + 6 = 0,
y =0 и x = 3

23. $y = x^2 - 2x + 3$ и
y = 3x −1

24. x − y +2 = 0, y =0,
x = −1, x = 2

25. y^2 = 4x, x = 1 и осью ох

26. $y = x^2$ и y = −3x

27. x − y +3 =0 ,
x + y −1= 0, y = 0

28. x^2 = 3y и y = x

29. x^2 + y^2 = 9

30. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Инструкция по выполнению практического занятия:

1. Прочитайте краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.
2. Устно ответьте на вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию.
3. Внимательно прочитайте условие каждой задачи. Определите, какие основные понятия, операции необходимо применить к данной задаче.
4. Исходя из того, что известно по условию задачи, попробуйте найти неизвестные на черновике. Черновиком может служить рабочая тетрадь студента. Записывайте подробно, что Вы находите в каждом действии.
5. Решив задачу на черновике (в рабочей тетради), попробуйте сформулировать к ней ответ. Ответ должен быть полным, развернутым.
6. Проверьте правильность решения задачи, требования к проведению расчетов и использованию необходимых формул.
7. Убедившись, что задача решена правильно на черновике (в рабочей тетради), аккуратно спишите ее в чистовик.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практического зантия:

- соблюдены все требования к проведению расчетов и использованию необходимых формул;
- доступность и наглядность информации при решении задач;
- правильное решение задач при использовании формул логики.

Практическое занятие № 4. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных.

Цель занятия:

– применить умения по дифференциальному исчислению функции нескольких действительных переменных.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.;
– калькулятор простой.

<u>Задание:</u>

I Вариант

1. Найдите частные производные функции.

а) $z=\frac{3x}{y}$;

б) $z=x^2+y^3+3x^2y^3$;

II Вариант

а) $z=\frac{2x}{y}$;

б) $z=x^3+y^2+3x^2y^2$;

в) $z = xy + \frac{x}{y}$;

г) $z = \frac{y - 3x}{x + 4y}$;

д) $z = x^2 \sin^2 y$;

е) $z = arctg\,\frac{y}{x}$;

ж) $z = \ln(2x - y)$.

в) $z = xy + \frac{x}{y}$;

г) $z = \frac{y - 2x}{x + 3y}$;

д) $z = x^2 \cos^2 y$;

е) $z = arctg\,\frac{x}{y}$;

ж) $z = \ln(4x - y)$.

2. Вычислите значение частной производной функции.

$z = \frac{2x + y}{x - 3y}$ в точке М(-1;2).

$z = \frac{x + 2y}{3x - y}$ в точке М(-2;1).

3. Вычислите полный дифференциал функции.

$z = x^4 - 2x^3y^3 + y^2$ в точке М(0;1).

$z = x^4 + 2x^2y^3 - y^2$ в точке М(1;0).

4. Найдите частные производные второго порядка.

$z = x^3 + 8xy^2 - 6x^2y - 8y^2$.

$z = x^3 + 6x^2y - 10xy^2 - 4y^2$.

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Внимательно прочитать тему и цель практического занятия.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

<u>Пояснения к работе (учебный материал):</u>

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной x называется производная этой функции при постоянном значении переменной *y*; она обозначается $\frac{dz}{dx}$ или z_x'.

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной y при постоянном значении переменной *x*; она обозначается $\frac{dz}{dy}$ или z_y'.

Частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ в некоторой точке *M(x;y)* называется выражение $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, где $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ вычисляются в точке *M(x;y)*, а

$dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Если z_x' и z_y' имеют в точке М частные производные по переменным *x* и *y*, то они называются частными производными второго порядка от функции *Z(M)* в этой точке и обозначаются:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = z''_{xx}\ ,\quad \frac{d^2z}{dxdy} = z_{xy}''\ ,\quad \frac{d^2z}{dydx} = z_{yx}'\ ,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = z_{xx}'\ .$$

Частные производные второго порядка вида z_{xy}'', z_{yx}'' называются смешанными частными производными.

Частные производные третьего порядка определяются как частные производные от частных производных второго порядка и т.д..

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1.

Найдите частные производные функции.

а) $z = \frac{20x}{y}$;

$$\frac{dz}{dx} = \frac{20}{y};$$

$$\frac{dz}{dy} = 20x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{20x}{y^2};$$

б) $z = x^4 + y^3 + 4x^3y^2$;

$$\frac{dz}{dx} = 4x^3 + 12x^2y^2;$$

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 + 8x^3y;$$

в) $z = \frac{x-2y}{y+3x}$;

$$\frac{dz}{dx}=\frac{(x-2y)_x'\cdot(y+3x)-(x-2y)\cdot(y+3x)_x'}{(y+3x)^2}=\frac{1\cdot(y+3x)-(x-2y)\cdot 3}{(y+3x)^2}=\frac{y+3x-3x+6y}{(y+3x)^2}=\frac{7y}{(y+3x)^2}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(x-2y)_y'\cdot(y+3x)-(x-2y)\cdot(y+3x)_y'}{(y+3x)^2}=\frac{-2(y+3x)-(x-2y)\cdot 1}{(y+3x)^2}=\frac{-2y-6x-x+2y}{(y+3x)^2}=-\frac{7x}{(y+3x)^2}$$

г) $z=x^3\cos^3 y;$

$$\frac{dz}{dx}=\left(x^3\right)_x'\cos^3 y+x^3\cdot\left(\cos^3 y\right)_x'=3x^2\cos^3 y+x^3\cdot 0=3x^2\cos^3 y;$$

$$\frac{dz}{dy}=\left(x^3\right)_y'\cdot\cos^3 y+x^3\cdot\left(\cos^3 y\right)_y'=0\cdot\cos^3 y+x^3\cdot 3\cos^2 y\cdot(\cos y)'=-3x^3\cos^2 y\sin y;$$

д) $z=arctg\,\frac{x}{y};$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{y}{y^2+x^2};$$

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'=-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{x}{y^2}=\frac{y^2}{y^2+x^2};$$

е) $z=\ln(y-3x);$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-3x}\cdot(y-3x)_x'=\frac{1}{y-3x}\cdot(-3)=-\frac{3}{y-3x};$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y-3x}\cdot(y-3x)_y'=\frac{1}{y-3x}\cdot 1=\frac{1}{y-3x}.$$

Пример 2.

Вычислить значение частной производной функции в точке *M(-2;-2)*.

$$z=\frac{3x+y}{4x-y}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{(3x+y)_x'\cdot(4y-x)-(3x+y)\cdot(4y-x)_x'}{(4y-x)^2}=\frac{3(4y-x)-(3x+y)\cdot(-1)}{(4y-x)^2}=\frac{12y-3x+3x+y}{(4y-x)^2}=\frac{13y}{(4y-x)^2};$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_M=z_x'(-2;-2)=\frac{13\cdot(-2)}{(4\cdot(-2)-(-2))^2}=\frac{-26}{36}=-\frac{13}{18};$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(3x+y)_y{}' \cdot (4y-x)-(3x+y)\cdot (4y-x)_y{}'}{(4y-x)^2}=\frac{1\cdot (4y-x)-(3x+y)\cdot 4}{(4y-x)^2}=\frac{4y-x-12x-4y}{(4y-x)^2}=\frac{-13x}{(4y-x)^2};$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_M=z_y{}'(-2;-2)=\frac{-13\cdot(-2)}{(4\cdot(-2)-(-2))^2}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}.$$

Пример 3.

Вычислить полный дифференциал функции в точке *M(1;1)*.

$$z=x^3-3x^2y^2+y^4;$$

$$\frac{dz}{dx}=3x^2-6xy^2;$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_M=z_x{}'(1;1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1\cdot 1^2=3-6=-3;$$

$$\frac{dz}{dy}=-6x^2y+4y^3;$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_M=z_y{}'(1;1)=-6\cdot 1^2\cdot 1+4\cdot 1^3=-6+4=-2;$$

По формуле $dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, получим $dz=-3dx-2dy$.

Пример 4.

Найти частные производные второго порядка функции

$$z=x^4+4x^2y^3+7xy+1,$$

$$\frac{dz}{dx}=4x^3+8xy^3+7y;$$

$$\frac{dz}{dy}=12y^2x^2+7x;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=12x^2+8y^3;$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=24xy^2+7;$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = 24xy^2 + 7;$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 24yx^2.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется частичной производной по переменной x?

2. Что называется частичной производной по переменной у?

3. Что называется полным дифференциалом функции?

Содержание отчета:

Название практической работы.

Учебная цель.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическое занятие №5. Вычисление интегралов.

Цель занятия:

– применить умения по интегральному исчислению функции нескольких действительных переменных

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.;
– калькулятор простой.

Задание:

I Вариант **II Вариант**

1. Вычислите повторные интегралы.

a) $\int_0^3 dx \int_0^2 (x^2 + 2xy)dy,$ a) $\int_0^4 dx \int_0^3 (x^2 - 2xy)dy,$

б) $\int\limits_{0}^{1} dy \int (3x-2y)dx.$ б) $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} (2x+y) = dx.$

2. Вычислите двойной интеграл по областям, ограниченным указанным линиями.

$\iint\limits_{D} xydxdy, \quad y=0, \quad y=4-x^2.$ $\iint\limits_{D} xydxdy, \quad y=0, \quad y=1-x^2.$

3. Вычислите двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями, предварительно разбив данную область на 2 области.

$\iint\limits_{D} xdxdy, \quad y=x^2 \quad y=2x, \quad y=3x.$ $\iint\limits_{D} xdxdy, \quad y=\frac{x}{2}, \quad y=2x, \quad y=6-x.$

4. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле.

$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x,y)dy.$ $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

Порядок выполнения:

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Пояснения к работе (учебный материал):

Двойным интегралом функции *f(x;y)* по области *D* называться предел этой суммы:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \iint\limits_{Д} f(x;y)ds,$ *где* x - наибольший из диаметров элементарных областей

ΔS_i. Функция *z* = *f(x;y)*, для которых предел существует и конечен, называется интегрируемой в этой области.

В прямоугольных координатах дифференциал площади $dS = dxdy$, тогда двойной интеграл примет вид

$$I = \iint\limits_{D} f(x;y)dxdy.$$

Если *f(x;y) > 0*, то двойной интеграл функции $z = f(x;y)$ по области *D* равен объему тела, органического сверху поверхностью $z = f(x;y)$, сбоку цилиндрической поверхностью,

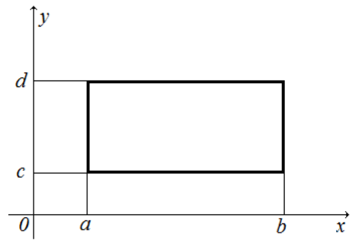
образующие которой параллельны оси *Oz*, а направляющей служит контур фигуры *D*, и снизу плоскостью *z=0*.

Основные свойства двойного интеграла.

1) $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x;y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x;y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x;y)dxdy.$

2) $\iint\limits_D kf(x;y)dxdy = k\iint\limits_D f(x;y)dxdy.$

3) $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy.$



Основные случаи вычисления двойного интервала в прямоугольных координатах.

1) Если область D, в которой рассматривается двойной интеграл, есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и заданным уравнениями $x = a$, $x = b$ $\left(a \le x \le b\right)$, y=c, $y = d$ $\left(c \le y \le d\right)$, то двойной интеграл вычисляется по одной из формул.

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^в dx\int\limits_c^d f(x;y)dy. \qquad (1)$$

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^в f(x;y)dx. \qquad (2)$$

Интегралы в правых частях формул называться повторными (или двукратными), а интегралы $\int\limits_c^d f(x;y)dy$ и $\int\limits_a^b f(c;y)dx$ называются внутренними.

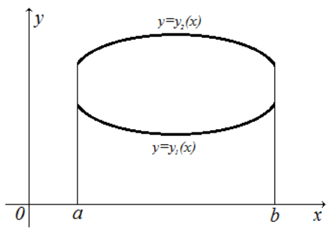
Под символом $\int\limits_a^в dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$ в формуле (1) подразумевается дважды произведенное интегрирование. Первое интегрирование (внутреннее) по переменной y совершается в пределах от c до d в предположении, что x остается постоянным; результат интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

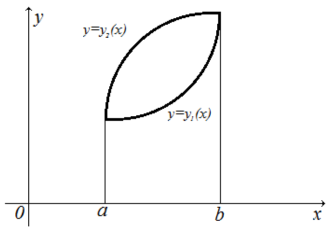
Если вычисление двойное интеграла выполняется по формуле (2), то порядок интегрирования меняется; внутренний интеграл вычисляется по переменной x, причем y сохраняет постоянное значение, а внешнее (повторное) интегрирование производиться по переменной y.

2) Если область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области и параллельная оси Oy, пересекает ее границу в двух точках, то эта область называется простой относительно оси Ox и определяется системой неравенств вида

$$a \le x \le в, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле.





$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \qquad (3)$$

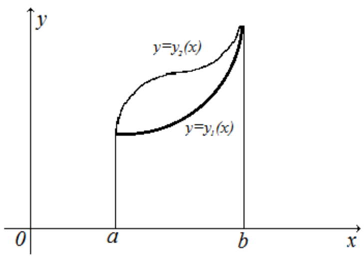
3) Если граница области *D* пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области и параллельной оси *Oy* и определяется системой неравенств вида

$c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$

В этом случае двойной интеграл выражается формулой

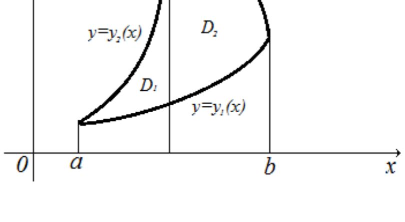
$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx\,,$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной *x*, а затем по переменной *y*.



3)Если нижняя или верхняя линии границы состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область *D* необходимо разбить прямыми, параллельными оси *Oy*, на такие части, чтобы каждый из участков выражался одним уравнением. В этом случае вычисление двойного интеграла сводиться к вычислению двух (и более) повторных интегралов.

В случае, изображенном на рисунке, область D_1 определяется системой неравенств $a \le (x) \le c,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$ а область D_2 - системой неравенств $c \le x \le b,\ \varphi_2(x) \le y \le \varphi_3(x),$ и значит



$$\iint\limits_D f\ dxdy = \iint\limits_{D_1} f\ dxdy + \iint\limits_{D_2} f\ dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} fdy + \int\limits_c^{в} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f\ dy \qquad (4).$$

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример1.

Вычислите повторный интеграл.

а) $\int_0^2 dx \int_0^4 \left(x^3 - 4xy\right) dy$.

$$\int_0^4 \left(x^3 - 4xy\right) dy = x^3 y - 4x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = x^3 y - 2xy^2 \Big|_0^4 = \left(x^3 \cdot 4 - 2x \cdot 4^2\right) - \left(0^3 \cdot y - 2x \cdot 0^2\right) = 4x^3 - 32x;$$

$$\int_0^2 \left(4x^3 - 32x\right) dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 32 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = x^4 - 16x^2 \Big|_0^2 = \left(2^4 - 16 \cdot 2^2\right) - \left(0^4 - 16 \cdot 0^2\right) = 16 - 64 = -48;$$

б) $\int_{-1}^2 dy \int_0^{y^2} \left(4x - 2y\right) dx$

$$\int_0^{y^2} \left(4x - 2y\right) dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2yx \Big|_0^{y^2} = 2x^2 - 2yx \Big|_0^{y^2} = \left(2 \cdot \left(y^2\right)^2 - 2y \cdot y^2\right) - \left(2 \cdot 0^2 - 2 \cdot y \cdot 0\right) = 2y^4 - 2y^3;$$

$$\int_{-1}^2 \left(2y^4 - 2y^3\right) dy = 2 \cdot \frac{y^5}{5} - 2 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{2y^2}{5} - \frac{y^4}{2} \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2 \cdot 2^5}{5} - \frac{2^4}{2}\right) - \left(\frac{2 \cdot (-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{2}\right) =$$

$$= \frac{64}{5} - 8 + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{66}{5} - 8\frac{1}{2} = \frac{66}{5} - \frac{17}{2} = \frac{132 - 85}{10} = \frac{47}{10} = 4{,}7$$

Пример 2.

Вычисление двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями.

$$\iint_D xy \;\; dx \;\; dy, \;\; y = 0, \quad y = 9 - x^2.$$

Находим точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 9 - x^2, \end{cases}$$

$$9 - x^2 = 0,$$

$$-x^2 = -9,$$
$$x^2 = 9,$$
$$x = \pm 3.$$
$$M(3;0), N(-3;0).$$

Область D определяется системой неравенств

$$-3 \le x \le 3, \;\; 0 \le y \le 9 - x^2$$

Вычислим двойной интеграл по области D

$$\int_{-3}^{3} dx \int_{0}^{9-x^2} xy \ \ dy$$

$$\int_{0}^{9-x^2} xy\,dy = \frac{xy^2}{2}\Big|_{0}^{9-x^2} = \frac{x(9-x^2)^2}{2} - \frac{x\cdot 0^2}{2} = \frac{x(81-18x^2+x^4)}{2} = \frac{81x-18x^3+x^5}{2} = \frac{81}{2}x - 9x^3 + \frac{1}{2}x^5;$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\frac{81}{2}x - 9x^3 + \frac{1}{2}x^5\right)dx = \frac{81}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - 9\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{6}\Bigg|_{-3}^{3} = \frac{81x^2}{4} - \frac{9x^4}{4} + \frac{x^6}{12}\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= \left(\frac{81\cdot 3^2}{4} - \frac{9\cdot 3^4}{4} + \frac{3^6}{12}\right) - \left(\frac{81\cdot(-3)^2}{4} - \frac{9\cdot(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^6}{12}\right) = \frac{729}{4} - \frac{729}{4} + \frac{729}{12} - \frac{729}{4} + \frac{729}{4} - -\frac{729}{12} = 0$$

Пример 3.

Вычислите двойной интеграл по областям, ограниченным указанным линиями, предварительно разбив заданную область на 2 области.

$$\iint_D xdxdy,\ y = \frac{x}{3},\ \ y = 4x\,,\ y = 4 - x\,.$$

Находим точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases} y = 4x, \\ y = \dfrac{x}{3}; \end{cases}$$

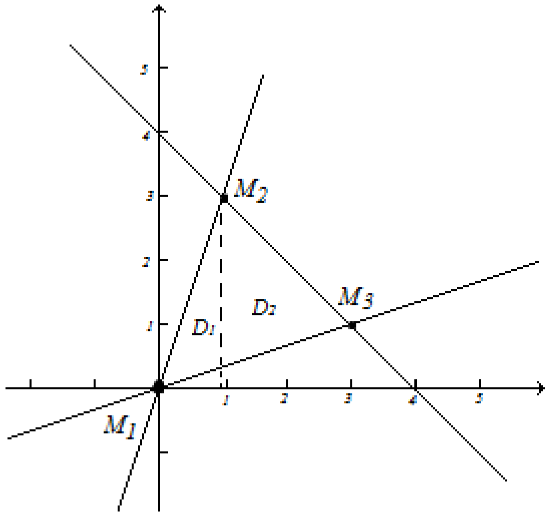
$$4x = \frac{x}{3},$$
$$4x - \frac{x}{3} = 0,$$
$$\frac{12x - x}{3} = 0,$$
$$\frac{11x}{3} = 0,$$
$$11x = 0,$$
$$x = 0,$$
$$y = \frac{0}{3},$$
$$y = 0. \quad M_1(0;\quad 0)$$

$$\begin{cases} y = 4x, \\ y = 4 - x, \end{cases}$$

$$4x = 4 - x,$$
$$4x - 4 + x = 0,$$
$$5x - 4 = 0,$$
$$5x = 4,$$
$$x = \frac{4}{5},$$
$$y = 4\cdot\frac{4}{5},$$
$$y = \frac{16}{5},$$
$$y = 3\frac{1}{5} \quad M_2\left(\frac{4}{5};\quad 3\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{3}; \\ y = 4 - x; \end{cases}$$

$$\frac{x}{3} = 4 - x,$$
$$\frac{x}{3} - 4 + x = 0,$$
$$1\frac{1}{3}x = 4,$$
$$x = 4 : 1\frac{1}{3},$$
$$x = 4 : \frac{4}{3},$$
$$x = 4\cdot\frac{3}{4},$$
$$x = 3.$$
$$y = \frac{3}{3} = 1. \quad M_3(3;\quad 1)$$



Область D разобьем на две области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств.

$$0 \le x \le \frac{4}{5}; \quad 4 - x \le y \le 4x,$$

$$\frac{4}{5} \le x \le 3, \quad 4 - x \le y \le \frac{x}{3}.$$

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} x dx dy = \int\limits_0^{\frac{4}{5}} dx \int\limits_{4-x}^{4x} x dy.$$

$$\int\limits_{4-x}^{4x} x dy = xy\Big|_{4-x}^{4x} = x \cdot 4x - x \cdot (4 - x) = 4x^2 - 4x + x^2 = 5x^2 - 4x;$$

$$\int\limits_0^{\frac{4}{5}} \left(5x^2 - 4x\right) dx = \frac{5 \cdot x^3}{3} - \frac{4 \cdot x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{4}{5}} = \frac{5x^3}{3} - 2x^2\Bigg|_0^{\frac{4}{5}} = \left(\frac{5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3}{3} - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) - \left(\frac{5 \cdot 0^3}{3} - 2 \cdot 0^2\right) =$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{64}{125}}{3} - 2 \cdot \frac{16}{25} = \frac{64}{25 \cdot 3} - \frac{32}{25} = \frac{64 - 96}{75} = -\frac{32}{75};$$

Вычислим двойной интеграл по области D_2:

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} x dx dy = \int\limits_{\frac{4}{5}}^{3} dx \int\limits_{4-x}^{\frac{x}{3}} x dy$$

$$\int_x^{\frac{x}{3}} x\,dy = xy\Big|_x^{\frac{x}{3}} = x\cdot\frac{x}{3} - x\cdot(4-x) = \frac{x^2}{3} - 4x + x^2 = \frac{4x^2}{3} - 4x;$$

$$\int_{\frac{4}{5}}^{3}\left(\frac{4x^2}{3} - 4x\right)dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{4}{5}}^{3} = \frac{4x^3}{9} - 2x^2\Bigg|_{\frac{4}{5}}^{3} = \left(\frac{4\cdot 3^3}{9} - 2\cdot 3^2\right) - \left(\frac{4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3}{9} - 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\right) =$$

$$= 12 - 18 - \frac{4\cdot\frac{64}{125}}{9} + 2\cdot\frac{16}{25} = -6 - \frac{256}{125\cdot 9} + \frac{32}{25} = -6 - \frac{256+1440}{1125} = -6 - \frac{1696}{1125} = -6 - 1\frac{571}{1125} =$$

$$= -7\frac{571}{1125}.$$

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{32}{75} - 7\frac{571}{1125} = \frac{-32}{75} - \frac{8446}{1125} = \frac{-225-8446}{1125} = \frac{-8671}{1125} = -7\frac{796}{1125}.$$

Пример 4.

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.

$$\int_0^1 dx \int_x^{-x^2+2} f(x;\quad y)\,dy.$$

Запишем область интегрирования D в виде системы неравенств $0 \le x \le 1 \quad x \le y \le -x^2 + 2$,

Построим линии: $x = 0, \quad x = 1, \quad y = x, \quad y = x^2 + 2.$

Найдем точку пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = -x^2 + 2, \end{cases}$$

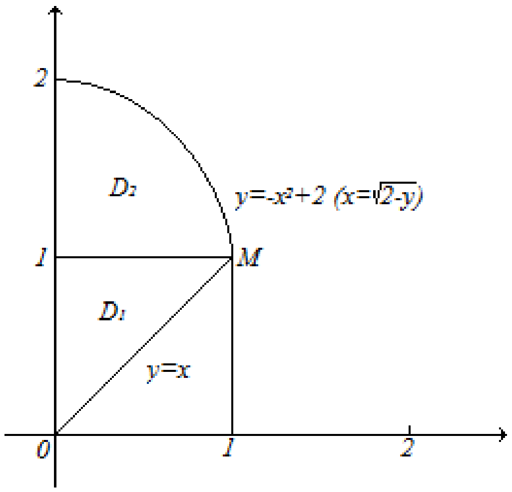
$$-x^2 + 2 = x,$$

$$-x^2 - x + 2 = 0,$$

$$D = 1 - 4\cdot(-1)\cdot 2 = 1 + 8 = 9,$$

$$x_1 = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2;$$

$$x_2 = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1. \quad M(1;\quad 1) \quad -\textit{точка} \quad \textit{пересечения}$$



Область D является простой относительно оси Ox. Рассмотрим область D относительно оси Oy. Через точку $M(1;\ 1)$, в которой стыкуются участки верхней границы области D, проведем прямую параллельную оси Ox эта прямая делить область D на две области D_1 и D_2, которые запишем в виде систем неравенств $0 \le y \le 1$; $0 \le x \le y$ и $1 \le y \le 2$; $0 \le x \le \sqrt{2-y}$.

Тогда согласно формуле $\iint\limits_D (x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$ получим

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{-x^2+2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x;\quad y)dx.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется двойным интегралом?

2.По какой формуле вычисляется двойной интеграл?

<u>Содержание отчета:</u>

Название практической работы.

Учебная цель.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическое занятие №6. Исследование сходимости рядов.

Цель занятия:

– применить умения на методы дифференциального исчисления, на определение сходимости числовых рядов.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;

– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.;
– калькулятор простой.

<u>Задание:</u>

I вариант | **II вариант**

1. Найдите первые четыре члена ряда по заданному общему члену:

I вариант:

а) $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}$;

б) $a_n = \dfrac{n+1}{(2n+1)\cdot 3^{n-1}}$;

II вариант:

а) $a_n = \dfrac{3n+2}{(3n-1)\cdot 2^{n-1}}$;

б) $a_n = \dfrac{3n+1}{(n^2+1)\cdot 3^{n-1}}$;

2. Найдите формулу общего члена ряда:

I вариант:

а) $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{3}+\ldots$;

б) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{8}{9}+\ldots$.

II вариант:

а) $\dfrac{5}{1}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{13}{3}+\ldots$;

б) $\dfrac{4}{2}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{10}{12}+\ldots$.

3. Вычислите сумму членов ряда:

I вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

II вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4. Используя признак сравнения, исследуйте сходимость ряда:

I вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$.

II вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

5. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда:

I вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$.

II вариант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$.

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

<u>Пояснения к работе (учебный материал):</u>

Числовым рядом называется сумма вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, где числа $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы $s_1 = u_1$,

$s_2 = u_1 + u_2$,

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$,

…………………..
$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$,
составленные из первых членов ряда называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм S_1, S_2, S_3, $\dots, S_n$,... Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S-суммой сходящегося ряда, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ или $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n) = S$.

Эта запись равносильна записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = S$

Если частичная сумма S_n ряда при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (в частности стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, то такой ряд называется расходящимся. Если ряд сходится, то значение S_n при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S.

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{n} + ...$ называется гармоническим.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться только при условии, что его общий член a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

1. Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + ... + aq^2 + ...(a > 0)$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$ и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ являющийся расходящимся.

При исследовании рядов используется также обобщённый гармонический ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$

Если *p=1*, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если *p<1* , то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При *p>1* имеем геометрический ряд, в котором $|q| < 1$; он является сходящимся. Итак, обобщённый гармонический ряд сходится при p>1 и расходится при $p \leq 1$.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} + ...(a_n > 0)$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = l$, то сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не даёт ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приёмы.

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1.

Найдите первые четыре члена ряда по заданному общему члену:

$$a_n = \frac{2n+1}{(2n-1)\cdot 2^n};$$

$$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{(2\cdot 1-1)\cdot 2^1} = \frac{3}{2};$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{(2\cdot 2+1)\cdot 2^2} = \frac{5}{12};$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{(2\cdot 3-1)\cdot 2^3} = \frac{7}{40};$$

$$a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{(2\cdot 4-1)\cdot 2^4} = \frac{9}{112}.$$

Пример 2.

Найдите формулу общего члена ряда:

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{5} - ....$$

Числители членов ряда образуют натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели – натуральный ряд чисел, начиная с 3. Знаки чередуются по закону $(-1)^{n+1}$ или по закону $(-1)^{n-1}$. Значит, *n-й* член ряда имеет вид

$u_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$ или

$u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+2}$.

Пример 3.

Вычислите сумму членов ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{4};$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7};$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{2}{7} + \frac{1}{70} = \frac{3}{10};$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{10} + \frac{1}{130} = \frac{4}{13};$$

………………………………………………….

Общий член этой последовательности:

$$a_n = \frac{n}{3n+1};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Последовательность частных сумм имеет предел, равный $\frac{1}{3}$. Итак, ряд сходится и $S = \frac{1}{3}$.

Пример 4.

Используя признак сравнения, исследуйте сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется.

Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \frac{1}{2^n} + \ldots$, который сходится, так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства $\frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}$; ..., $\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$;..., т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots;$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда, следовательно ряд расходится. При сравнении данного ряда с гармоническим также убеждаемся, что ряд расходится.

$\frac{1}{2} < 1$; $\frac{2}{3} < \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} < \frac{1}{3}$;...; $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{n}$;...

Пример 5.

Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \ldots + \frac{2n}{5^n} + \ldots;$

$$a_n = \frac{2n}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}}{\frac{2n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] == \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{5n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{5} = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

б) $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+...+\frac{n!}{3^n}+...$

$a_n=\frac{n!}{3n};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1$, т.е. ряд расходится.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется числовым рядом?

2. Какой ряд называется расходящимся?

3. Какой ряд называется сходящимся?

4. Какой ряд называется геометрическим?

5. Какой ряд называется гармоническим?

Содержание отчета:

Название практической работы.

Учебная цель.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическое занятие №7. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Цель занятия:

– развитие умений и навыков по вычислению дифференциальных уравнений второго порядка.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.;
– калькулятор простой.

1. ***Основной теоретический материал***

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением*.

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'', имеет вид $y''=f(x,y,y')$. Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида $y''=f(x)$. Такое уравнение решается двукратным интегрированием:

$dy'=f(x)dx$, откуда $y'=\int f(x)dx$. Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от $f(x)$, которую обозначим через $F(x)$.

Таким образом $y'=F(x)+C_1$; $\frac{dy}{dx}= F(x)+C_1$; $dy=(F(x)+C_1)dx$.

Интегрируем ещё раз $y=\int(F(x)+C_1)dx= =\int(F(x)+C_1\int dx$ или $y=\Phi(x)+C_1x+C_2$. Итак, получили общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y''+py'+qy=f(x)$, где p и q– постоянные величины, а $f(x)$–непрерывная функция x. Если правая часть уравнения равна нулю, т.е. $y''+py'+qy=0$, то оно называется *однородным уравнением*.

Для практического использования *алгоритм решения* таких уравнений удобно оформить в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант $D = p^2 – 4q$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = C_1e^{kx_1} + C_2e^{k_2x}$	$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$	$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$

2. *Решение типовых заданий*

Пример 1: Найти общее решение уравнения $y''=4x$.

Решение: $\frac{dy'}{dx}=4x$; $dy'=4x\ dx$; $y'=4\int x\ dx=2x^2+\ C_1$;

$\frac{dy}{dx}=2x^2+\ C_1$; $dy=(2x^2+\ C_1)\ dx$;

$y=\int(2x^2+\ C_1)\ dx=2\int x^2dx+C_1\int dx=\frac{2x^3}{3}+\ C_1x+C_2$.

Пример 2: Найти общее решение уравнения $y''=\sin 2x$.

Решение: Умножим обе части уравнения на dx и затем проинтегрируем: $dy'=\sin 2xdx$; $\int dy'=\int\sin 2xdx$; $y'=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$. Обе части последнего уравнения умножим на dx и проинтегрируем: $dy=-\frac{1}{2}\cos 2xdx+C_1dx$; $\int dy=-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+C_1\int dx+C_2$.

Итак, $y=dy=-\frac{1}{4}\sin 2xdx+C_1x+C_2$- общее решение уравнения.

Пример 3: Решить уравнение $y'' + 2y' – 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$.

$D = p^2 – 4q = 2^2 -4(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$.

Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1 = –4$, $k_2 = 2$. Находим частные решения данного дифференциального уравнения: $y_1 = e^{-4x}, y_2 = e^{2x}$.

Общее решение данного уравнения имеет вид**:** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$**.**

3. ***Задания***: Найти общее решение дифференциального уравнения:

1 вариант	**2 вариант**
$y''=0$	$y''=5$
$y''=x$	$y''=x^3$
$y'' + y' - 6y = 0$	$y'' - 6y + 9 = 0$
$y'' - 2y' - 8y = 0$	$y'' - 8y + 16 = 0$
$y'' - 4y' + 13y = 0.$	$y'' - 3y' + 2y = 0$
$y'' + 4y = 0.$	$y'' + 6y = 0$

4. ***Содержание отчёта***

Отчёт должен содержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***

1. Приведите примеры дифференциальных уравнений.
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Как решается уравнение с разделёнными и с разделяющими переменными?

Практическое занятие №8. Действия над матрицами.

Цель занятия:

– сформировать навыки операций над матрицами, вычислений определителей, нахождения обратной матрицы.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;

– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

Упражнения к практическому занятию:

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу A: с матрицей B; с матрицей C; с матрицей D?

Решение:

Матрицу A нельзя сложить с матрицей B, так как матрица A имеет размеры 3×2, матрица B - размеры 2×3, а складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Матрицы A и C имеют одинаковые размеры, поэтому их можно складывать. Матрицы A и D имеют одинаковые размеры, следовательно, их можно складывать.

2. Найти *A+B* , если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Так как матрицы имеют одинаковый размер, то их можно складывать. При сложении матриц надо сложить элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 0+7 & -2+2\\ -5+3 & 6+4 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Дано:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4 & -1\\ 6 & 3 & 0 & 11\\ 7 & 8 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Найти: -3*A*.

Решение:

$$-3A=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы -3 умножить на матрицу *A* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на -3.

$$-3A=\begin{bmatrix}-3\cdot 2 & -3\cdot 5 & -3\cdot 4 & -3\cdot(-1)\\ -3\cdot 6 & -3\cdot 3 & -3\cdot 0 & -3\cdot 11\\ -3\cdot 7 & -3\cdot 8 & -3\cdot 1 & -3\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

4. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 10\\ 4 & 2 & -2\\ 2 & 7 & 13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти: *2A+B-3C*.

Решение:

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 20\\ 8 & 4 & -4\\ 4 & 14 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 9 & -6 & 9\\ 0 & -3 & 18\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-1-3 & 6+1-(-15) & 20+3-6\\ 8+13-9 & 4+1-(-6) & -4+4-9\\ 4-5-0 & 14+2-(-3) & 26+5-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу *X*, если:

$$а)\ 2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix};$$

$$б)\ 3X+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$а)\ X=\begin{pmatrix}3 & -13\\ -2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}.\ б)\ X=\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -4\end{pmatrix}.$$

$$а) 2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 4 & 8\\ 0 & 10\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}1-(-2) & -7-6\\ 2-4 & 8-8\\ -3-0 & 9-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -13\\ -2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}.$$

$$б)\ 3X+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix};\ 3X=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix};$$

$$3X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ 3X=\begin{pmatrix}-2-4 & 0-(-1\_\\ 4-3 & -8-4\end{pmatrix};\ 3X=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 1 & -12\end{pmatrix};$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 1 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -4\end{pmatrix}.$$

6. Матрицы *A* и *B* имеют вид

$$\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\ \forall\alpha,\ \beta,\gamma\in R$$

(знак $\forall$ - любой, любые). Будет ли матрица A+B такого же вида?

Решение:

Да. Так как в результате сложения матриц элемент $a_{11}=0+0=0.$

7. Матрицы *A* и *B* имеют вид

$$\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\ \forall\alpha,\ \beta,\gamma\in R$$

(знак $\forall$ - любой, любые). Будет ли матрица $A+B$ такого же вида?

Решение:

Нет. Так как в результате сложения матриц элемент $a_{11} = 2 + 2 = 4 \neq 2.$

8. Даны четыре матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подберите α, β, γ так, чтобы выполнялось равенство $A = \alpha\, B + \beta\, C + \gamma\, D.$

Решение:

$\alpha = 2;\ \beta = 3;\ \gamma = 6.$

$$\alpha B + \beta C + \gamma D = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 0 + 0 \\ 0 + \beta + 0 \\ 0 + 0 + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

$$A = \alpha\, B + \beta\, C + \gamma\, D \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2;\ \beta = 3;\ \gamma = 6.$$

9. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 23 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$$

Определить размер матрицы-произведения матриц *AB, CC, DM, NL, LK, LM, DD.*

Решение:

$A_{1\times2} \cdot B_{2\times4} = (AB)_{1\times4}; C_{2\times3} \cdot C_{2\times3} -$ не существует, т.к. число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй матрицы; $D_{2\times2} \cdot M_{2\times1} = (DM)_{2\times1};\ N_{1\times1} \cdot L_{1\times3} = (NL)_{1\times3};\ L_{1\times3} \cdot K_{3\times1} = (LK)_{1\times1};\ L_{1\times3} \cdot M_{2\times1} -$ не существует, т.к. число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй матрицы; $D_{2\times2}\cdot D_{2\times2}=(DD)_{2\times2}$.

10. Дана матрица *A* размера 2×3.

Какие из указанных действий можно выполнить над матрицей *A*:

$$\frac{1}{3}A,\ A+A,\ A^2\,?$$

Решение:

Операция произведение матрицы на число всегда выполнима, поэтому $\frac{1}{3}A$ можно выполнить;
складывать можно матрицы одинаковых размеров, следовательно, $A+A$ можно выполнить;
матрицы можно умножать, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, поэтому $A^2=A_{2\times3}\cdot A_{2\times3}$ нельзя выполнить.

11. Найти *a, b, c* из уравнения

$$2\begin{pmatrix}2&3\\b&a\\3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&c\\a&c\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\c&6\\7&4\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{cases}c=2\\b=0.\\a=2\end{cases}$$

Учитывая определения операций сложения матриц и умножения матрицы на число, можно записать следующие равенства:

$$\begin{cases} 2\cdot 3+c=8 \\ 2b+a=c \\ 2a+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=8-6 \\ b=\dfrac{c-a}{2} \\ a=\dfrac{6-c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=0. \\ a=2 \end{cases}$$

12. **Выполнить действия:**

$$а)\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ б)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ в)\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$г)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix};\ д)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};\ е)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$а)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ б)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ \ в)\ (2);\ г)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \end{pmatrix};\ д)\ \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix};\ е)\ \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

$$а)\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$б)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 4 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 4 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$в)\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 2-1\cdot 6 \end{pmatrix}=(2);$$

$$г)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot(-5)+2\cdot 1 \\ -2\cdot 2+4\cdot(-5)+0\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -24 \end{pmatrix};$$

$$д)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot 3+3\cdot(-3)+2\cdot 1 \\ 1\cdot 3-4\cdot(-3)-5\cdot 1 \\ 2\cdot 3-1\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix};$$

$$е)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 1+2\cdot 0+2\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

13. Известно, что $A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 5}=C_{m\times n}\cdot$ **Найти *m* и *n* .**

Решение:

По правилу умножения матриц: Матрица-произведение имеет строк столько, сколько первая матрица, и столбцов – сколько вторая (пункт два), следовательно, $m = 3,\ n = 5.$

14. Известно, что $A_{2\times 3} \cdot B_{m\times n} = C_{2\times 6}\cdot$ **Найти *m* и *n* .**

Решение:

По правилу умножения матриц

$m = 3,\ n = 6.$

15. Известно, что $A_{2\times n} \cdot B_{m\times 3} = C_{2\times 3}\cdot$ **Найти *m* и *n* .**

Решение:

По правилу умножения матриц $m = n,\ m, n \in N$ (*m, n* - натуральные числа).

16. Известно, что $A_{5\times 9} \cdot B_{m\times n} = C_{5\times 1}\cdot$ **Найти *m* и *n* .**

Решение:

По правилу умножения матриц

$m = 9,\ n = 1.$

17. Известно, что $A_{5\times m} \cdot B_{7\times n} = C_{5\times 6}\cdot$ **Найти *m* и *n* .**

Решение:

По правилу умножения матриц

$m = 7,\ n = 6.$

18. Найти матрицу $C = AB^T - 3B,$ **если**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 25 & 26\end{pmatrix}.$$

Выполним по действиям:

1) $B^T=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$;

2) $A\cdot B^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$;

3) $3B=3\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 21\\ 18 & 24\end{pmatrix}$;

4) $C=AB^T-3B=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 21\\ 18 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 25 & 26\end{pmatrix}$.

Выполнение заданий под руководством преподавателя.

1.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение. Первая матрица имеет размеры 2´3, а вторая размеры 3´3, поэтому произведение существует. В результате умножения получится матрица C = (c_{ij}) размеров 2´3. Вычислим ее элементы.

c_{11} = (-2)×3 + 3×1 + 1×4 = 1, c_{12} = (-2)×(-1) + 3×1 + 1×6 = 11,

c_{13} = (-2)×2+3×0+1×8 = 4, c_{21} = 0×3 + 5×1 + 6×4 = 29,

c_{22} = 0×(-1) + 5×1 + 6×6 = 41, c_{23} = 0×2+5×0+6×8 = 48.

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & 11 & 4\\ 29 & 41 & 48\end{pmatrix}$.

2.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 1 & 4 & -6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 15 & 6 \\ 8 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Первая матрица имеет размеры 3´3, а вторая размеры 2´3. Число столбцов в первой матрице (3) не совпадает с числом строк во второй матрице (2), поэтому произведение не существует,

Ответ: произведение не существует.

3.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 15 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 18 & -20 & -23 \\ 108 & 63 & 62 \\ 51 & 30 & 19 \end{pmatrix}$.

4.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.Вычислить степень матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^6.$$

10. Вычислить степень матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^4.$$

11. Вычислить значение многочлена $f(x) = 2x^2 + x - 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Указание. $f(A) = 2A^2 + A - 3E$, где E – единичная матрица размеров 2´2. Далее использовать определения операций умножения матриц, умножения матрицы на число и сложения матриц.

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить значение многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\0&2&1&-1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

2. Самостоятельное выполнение заданий студентами.

1. Найдите сумму матриц $A=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&-1&0\\4&3&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.
2. Транспонируйте матрицу $A=\begin{pmatrix}2&9&-5\\-7&5&1\\6&1&0\end{pmatrix}$. Укажите размеры данной и транспонированной матриц.
3. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}7&-6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$. Произведите указанные действия, а в случае, когда это невозможно, указать причину: 1) $2A-B$; 2) A^T+4B.
4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&-2&1&5\\-1&-1&-3&1\\2&3&-5&0\end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=A\cdot B$.

I. Индивидуальная работа по вариантам.

Выполнить индивидуальную работу по теме «Действия с матрицами»

Задание. Выполнить указанные действия с матрицами *A* и *B*, если

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант №1 $(A+B)A-2B$	**Вариант №2** $A-B(A+2B)$	**Вариант №3** $(A-B)A+3B$	**Вариант №4** $3(A-B)-B^2$
Вариант №5 $(3A-B)-A^2$	**Вариант №6** $2A-B(B+A)$	**Вариант №7** $AB-(3A+B)$	**Вариант №8** $(A+2B)-BA$
Вариант №9 $AB-(4A+B)$	**Вариант №10** $(A+2B)+AB$	**Вариант №11** $(4A-B)-B^2$	**Вариант №12** $(2A+B)-A^2$
Вариант №13 $A^2+(B-3A)$	**Вариант №14** $(3A-B)-B^2$	**Вариант №15** $B^2+(A-2B)$	**Вариант №16** $(B-2A)+BA$
Вариант №17 $(2A-B)-AB$	**Вариант №18** $3A-(BA+B)$	**Вариант №19** $(2B-A)\cdot A-B$	**Вариант №20** $A^2+(A-2B)$
Вариант №21 $(A+4B)-AB$	**Вариант №22** $A^2-(B+4A)$	**Вариант №23** $(A-3B)-B^2$	**Вариант №24** $AB+(2A-B)$
Вариант №25 $B^2-(3A-B)$	**Вариант №26** $3(A+B)-A^2$	**Вариант №27** $B^2+3(A+B)$	**Вариант №28** $(A-3B)+B^2$
Вариант №1 $(A+B)A-2B$	**Вариант №2** $A-B(A+2B)$	**Вариант №3** $(A-B)A+3B$	**Вариант №4** $3(A-B)-B^2$
Вариант №5 $(3A-B)-A^2$	**Вариант №6** $2A-B(B+A)$	**Вариант №7** $AB-(3A+B)$	**Вариант №8** $(A+2B)-BA$
Вариант №9 $AB-(4A+B)$	**Вариант №10** $(A+2B)+AB$	**Вариант №11** $(4A-B)-B^2$	**Вариант №12** $(2A+B)-A^2$
Вариант №13 $A^2+(B-3A)$	**Вариант №14** $(3A-B)-B^2$	**Вариант №15** $B^2+(A-2B)$	**Вариант №16** $(B-2A)+BA$

Вариант №17 $(2A-B)-AB$	**Вариант №18** $3A-(BA+B)$	**Вариант №19** $(2B-A)\cdot A-B$	**Вариант №20** $A^2+(A-2B)$
Вариант №21 $(A+4B)-AB$	**Вариант №22** $A^2-(B+4A)$	**Вариант №23** $(A-3B)-B^2$	**Вариант №24** $AB+(2A-B)$
Вариант №25 $B^2-(3A-B)$	**Вариант №26** $3(A+B)-A^2$	**Вариант №27** $B^2+3(A+B)$	**Вариант №28** $(A-3B)+B^2$

II. Подведение итогов практического занятия.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей? Запишите общий вид матрицы размером mxn.
2. Какие матрицы называются равными?
3. Назовите виды матриц.
4. Назовите линейные операции над матрицами.
5. Какие матрицы можно перемножать? Как выполняется умножение?

Практическое занятие №9. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Цель занятия:

– применить умения по линейной алгебре: выполнять операции над матрицами.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.
– калькулятор простой.

<u>**Задание:**</u>

I вариант **II вариант**

1. Найти обратную матрицы с помощью формулы.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

2.Найдите обратную матрицу с помощью элементарный преобразований.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3. Найдите обратную матрицу

$A=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 4 & -1\\ 4 & 1 & -5 & 6\\ 2 & 1 & 5 & 8\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}$

Порядок выполнения:

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.
2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Пояснения к работе (учебный материал):

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является матрицей того же порядка.

Не каждая квадратная матрица имеет обратную. Для существования матрицы A^{-1} необходимым и достаточным условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется невырожденной, или неособенной; в противном случае (при $|A| = 0$) – вырожденной, или особенной.

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм вычисления обратной матрицы.

1) Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует.
   Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2) Находим матрицу A^T, транспонированную к A.

3) Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4) Вычисляем матрицу по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \quad (|A| \neq 0)$.

Любую невырожденную квадратную матрицу A с помощью отдельных элементарных преобразований только строк или только столбцов можно привести к единичной матрице E того же порядка. При этом те же преобразования, совершенные над матрицей E в том же порядке, приводят ее к обратной матрице A^{-1}. На этом основан ещё один способ нахождения обратной матрицы. Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая их рядом через черту.

При выполнении заданий рассмотрите примеры.

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0$$

Т.к. $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2) Находим транспонированную к A матрицу A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1-1=-2;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(1-2)=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(1+1)=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3.$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

4) Вычислим по формуле обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{|5|}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Пример 2.

Найти матрицу, обратную к матрице A, преобразуя исходную матрицу в единичную E.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица A имеет обратную

·(-6) ·(-6)

·(-2) ·(-2) ·(-2) ·(-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

·(-1) ·(-1)

·(-1) ·(-1)

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Слева получим единичную матрицу. Найденная справа от черты квадратная матрица является обратной к исходной матрице A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 7 & -6\\ -8 & -15 & 13\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Какая матрица называется обратной?
2. Сформулировать необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы?

<u>Содержание отчета:</u>

Название практической работы.

Учебная цель.

Решение заданий практической работы.

Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическое занятие №10. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Цель занятия:

– развитие умений и навыков по решению СЛУ методом Гаусса.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.
– калькулятор простой.

1. *Основной теоретический материал*

Теорема: Система $\underline{n}$ уравнений с $\underline{n}$ неизвестными, определитель которой $\neq 0$, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2.\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу А, а из свободных членов – матрицу-столбец В, т.е.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Если в определителе системы заменить столбцы коэффициентов при неизвестных на столбец свободных членов, то получим:

$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Тогда для решения системы запишется так:

$X = \frac{D_x}{D}$, $У = \frac{D_y}{D}$, $Z = \frac{D_z}{D}$.

2. *Решение типовых заданий:*

Пример 1: Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и из свободных членов $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель системы

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$

Вычислим определители при неизвестных:

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 25$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -25$

$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 50$

Найдем значения $X = \frac{D_x}{D} = \frac{25}{25} = 1$, $У = \frac{D_y}{D} = -\frac{25}{25} = -1$, $Z = \frac{D_z}{D} = \frac{50}{25} = 2$

Ответ: (1; –1; 2)

3. *Задания:*

1. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 5x + y + 3z = -4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 16 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

4. ***Содержание отчёта***

Отчёт должен содержать:

1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***

1. Сформулируйте теорему Крамера?
2. Опишите метод Гаусса.

Практическая работа № 11. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

Цель занятия:

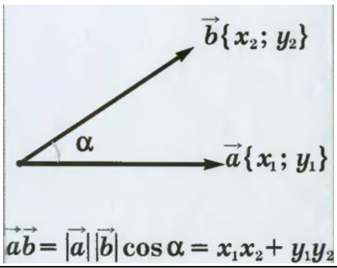
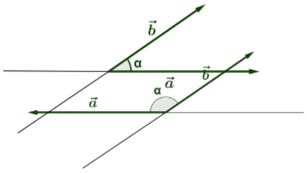
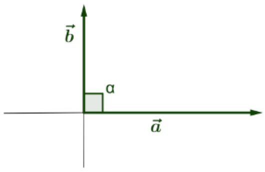
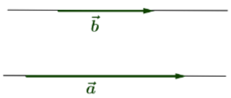
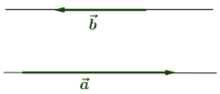
– научиться вычислять векторное и смешанное произведения векторов.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

Краткая теория

Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения векторов на плоскости	***Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:***  ***Важно!*** ***Произведение вектора на число – это вектор*** ***Произведение двух векторов, - это число (числа часто называют скалярными)***
Угол между векторами на плоскости	 ***Угол между векторами острый*** ***Угол между векторами тупой***  ***Угол между векторами – прямой (векторы перпендикулярны)***  ***Угол между векторами равен 0^0 Векторы сонаправлены***  **Угол между векторами равен 180^0 Векторы противоположно направлены** ***Если один из векторов или оба вектора нулевые, то угол между ними будет равен 0°.***
Знак скалярного произведения	1. Если угол между векторами острый, то скалярное произведение будет положительным числом (так как косинус острого угла — положительное число). Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен 0°, а косинус равен 1, скалярное произведение также будет положительным. 2. Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение будет отрицательным (так как косинус тупого угла — отрицательное число). Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен 180°. Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен −1.

	Справедливы и обратные утверждения: 1. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между данными векторами острый. 2. Если скалярное произведение векторов — отрицательное число, то угол между данными векторами тупой.
Особенный третий случай	3. Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю, так как косинус прямого угла равен 0. Обратное суждение: если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.
Квадрат вектора	Вектор, умноженный на самого себя будет числом, которое называется скалярным квадратом вектора. Скалярный квадрат вектора равен квадрату длины данного вектора и обозначается как $\vec{\mathbf{a}}^{2}$=
Свойства скалярного произведения	1. $\vec{a}^2 \geq 0$, к тому же $\vec{a}^2 > 0$ если $\vec{a} \neq \vec{0}$. 2. Переместительный или коммутативный закон скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. 3. Распределительный или дистрибутивный закон скалярного произведения: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$. 4. Сочетательный или ассоциативный закон скалярного произведения: $k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(k \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$.
Направляющие векторы	Вектор называют направляющим вектором прямой, если он находится на прямой или параллелен этой прямой. 
Координаты произведения вектора на число	***Если векторы заданы координатами:*** $\vec{a}\,\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2;y_2;z_2\}$, ***то скалярное произведение векторов вычисляется по правилу:*** $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
Основные формулы скалярного произведения в пространстве	***Если векторы заданы координатами:*** $\vec{a}\,\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2;y_2;z_2\}$, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$, $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Задания

Задание№1.

a) **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов a = {1; 2} и b = {4; 8}.

Решение: Если даны координаты векторов, то число, которое является скалярным произведением векторов, определяется следующим образом:

$\vec{a}\{x_a;y_a;z_a\}$ b $\{x_b;y_b;z_b\}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b=$

$\vec{a}=\{1;2\}$ и $\vec{b}=\{4;8\}$.

a · b = 1 · 4 + 2 · 8 = 4 + 16 = 20

Ответ: 20

Решить задание

b) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ {4;−6;4} и $\vec{b}$ {7;2;−8}.

Ответ:-16

Задание №2

a) **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов a и b, если их длины |a| = 3, |b| = 6, а угол между векторами равен 60˚.

Решение: a · b = |a| · |b| cos α = 3 · 6 · cos 60˚ = 9.

Ответ:9

b) Найти скалярное произведение векторов a и b, если их длины |a| = 10, |b| = 8, а угол между векторами равен 150˚.

Ответ:-40$\sqrt{3}$

Задание №3

a) **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов p = a + 3b и q = 5a - 3 b, если их длины |a| = 3, |b| = 2, а угол между векторами a и b равен 60˚.

Решение:

p · q = (a + 3b) · (5a - 3b) = 5 a · a - 3 a · b + 15 b · a - 9 b · b =

= 5 $|a|^2$ + 12 a · b - 9 $|b|^2$ = 5 · 3^2 + 12 · 3 · 2 · cos 60˚ - 9 · 2^2 = 45 +36 -36 = 45.

Ответ:45

b) Найти скалярное произведение векторов p = 2a + b и q = 3a - b, если их длины |a| = 2, |b| = 3, а угол между векторами a и b равен 30˚.

Задание №4

(Эталон решения задания) Найти скалярное произведение векторов a = {1; 2; -5} и b = {4; 8; 1}.

Решение: a · b = 1 · 4 + 2 · 8 + (-5) · 1 = 4 + 16 - 5 = 15.

Задание №5

a) **(Эталон решения задания)** Даны векторы $\vec{a}$ (−8;8;−4) и $\vec{b}$ (1;*x*;−2).

Найди значение *x*, если $\vec{a}\,\vec{b}$ =8.

Решение

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b$

Т.к $\vec{a}\,\vec{b}$ =8. То 8=(-8) 1+8x+ (-4)(-2)

8=-8+8x+8

8x=8

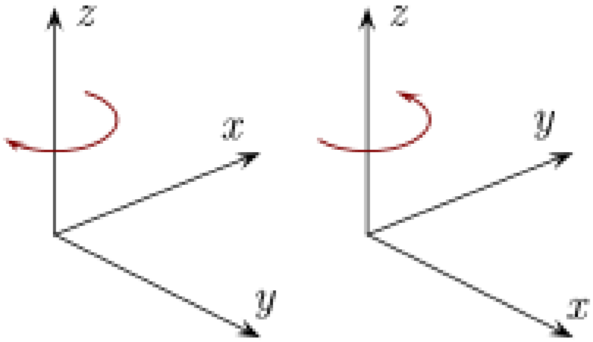
x=1

Ответ: 1

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Декартовы координаты в трехмерном пространстве (*левая* (на рисунке слева) и *правая* (справа) декартовы системы координат (левый и правый базисы). Принято по умолчанию использовать правые базисы (это общепринятое соглашение, если только какие-то особые причины не заставляют от него отойти — и тогда это оговаривается явно).



Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, который определяется тремя условиями:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарные векторы.

2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. $\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}$.

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Если $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Если $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c} = (x_3;y_3;z_3)$,то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая, со знаком «–», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - левая. Если же $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Практические задания для аудиторной работы

1. Даны векторы $\vec{a}$ = (2;5;7) и $\vec{b}$ = (1;2;4). Найти координаты векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$.
2. Вершины треугольника находятся в точках A(-1;2;-1), B(-3;1;1) и C(0;4;-3). Найдите площадь этого треугольника.
3. В пространстве даны четыре точки: A(1;1;1), B(4;4;4), C(3;5;5) и D(2;4;7). Найти объем тетраэдра ABCD.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вершины треугольника находятся в точках A(-2;4;2), B(-4;0;1) и C(0;2;-1). Найдите площадь этого треугольника.

2. Векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).
2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Вариант 3

1. Вершины треугольника находятся в точках A(0;5;1), B(-2;0;3) и C(4;1;-1). Найдите площадь этого треугольника.

2. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ и $D(3,4,-3)$ вычислить высоту $h = \left|\vec{DE}\right|$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.
2. Векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Контрольные вопросы

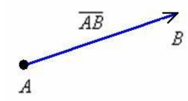
1. Дайте определение правой и левой тройки векторов.
2. Что такое векторное произведение векторов?

3. Какими свойствами обладает векторное произведение векторов?
4. Дайте определение смешанного произведения векторов.
5. В чем геометрический смысл смешанного произведения векторов?

Практическое занятие №12. Приложения скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.
Цель занятия:
– развитие умений и навыков по применению скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.
Оснащение:
– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

1. *Основной теоретический материал*

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец. В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{\mathrm{AB}}$ или $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Направление имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, и это уже совершенно другой вектор. Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

!!! Примечание: *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

Способы записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$… и так далее. При этом первая буква обязательно обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$… В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

Длиной или *модулем* ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю. Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Действия с векторами в координатах

1. *Как найти вектор по двум точкам?*

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Пример 1: Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$
Решение: по соответствующей формуле: $\overline{AB} = (-2-2; 3-1) = (-4;2)$.
Ответ: $\overline{AB}$ $(-4;2)$.

Пример 2:
а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.
б) Даны точки $A(2; 0)$, $B(-7; 1)$ и $C(4;1)$. Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.
в) Даны точки $F(-2; -1;0)$ и $E(0; -1; -2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10; 5;–4)$, $A_2(–8;6; 3)$, $A_3(1;1; –1)$, $A_4(0;0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$..

2. *Как найти длину отрезка?*

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости A $(x_1; y_1)$ и В $(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если даны две точки пространства A $(x_1; y_1; z_1)$ и В $(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 3: Даны точки $A(–3; 5)$ и B $(1; –3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле: $|AB| = \sqrt{\left(1 - (-3)\right)^2 + (-3 - 5)^2}$=$\sqrt{4^2 + (-8)^2}$= $\sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$.

Пример 4: Даны точки $A(2;3;–1)$ и $B(–5;3;0)$. Найти длину отрезка AB.

3. *Как найти длину вектора?*

Если дан вектор плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, , то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 5: Даны точки $A(–3; 5)$ и B $(1; –3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$

Решение: Сначала найдём вектор$\overline{AB}$: $\overline{AB}$ $(1 - (-3); -3 - 5) = (4; -8)$. По формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$вычислим длину вектора: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-8^2)} =$ $\sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ:$\left|\overline{AB}\right| = 4\sqrt{5}$.

4. *Действия с векторами в координатах*

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) *Правило сложения векторов*. Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$ и $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо сложить их соответствующие координаты: $\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2)$.

Если даны векторы $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2; \omega_3)$, то их суммой является вектор
$\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2; v_3 + \omega_3)$.

2) *Правило умножения вектора на число*. Для того чтобы вектор $\overline{v}(v_1; v_2)$ умножить на число μ, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число μ: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, правило такое же: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2; \mu v_3)$.

Пример 6: Даны векторы $\overline{a}(1; –2)$ и $\overline{b}(2;3)$. Найти $2\overline{a}$, $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$.

Решение:

$2\overline{a}$=2(1; –2)= (2; –4)

$\overline{a} + \overline{b}$=(1; –2)+ (2;3) =(1 + 2;–2+ 3)= (3;1)

$\overline{a} - \overline{b}$=(1; –2) – (2;3) =(1 – 2;–2– 3)= (–1; –5)

Ответ: $2\overline{a}$= (2; –4), $\overline{a} + \overline{b}$= (3;1), $\overline{a} - \overline{b}$= (–1; –5)

Пример 7: Даны векторы $\overline{a}(0;4;–7)$ и $\overline{b}(7;–9;1)$. Найти $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $-\overline{a} + 4\overline{b}$.

Решение: $3\overline{a} - 2\overline{b}$ =3(0;4;–7) – 2(7;–9;1)= (0;12;–21) –(14; –18; 2)= (–14; 30; –23).

$-\overline{a} + 4\overline{b}$= – (0;4;–7)+4(7;–9;1)= (0;–4; 7)+ (28;–36;4)=(28;–40;11)

Ответ: $3\overline{a} - 2\overline{b} = (-14;\ 30;\ -23)$, $-\overline{a} + 4\overline{b}$=(28;–40;11)

5. *Скалярное произведение векторов*

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos < (\overline{a}; \overline{b})$

Пример 8: Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу
$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos < (\overline{a}; \overline{b})$=2·5· $cos\frac{\pi}{6}$ = 10· $cos\frac{\pi}{6}$ = 10· 2 = $5\sqrt{3}$.

Ответ: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 9: Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}=-2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{d}=\overline{a} - \overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=8$, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение: Сначала проясним ситуацию с вектором $\overline{c}= -2\overline{a} + \overline{b}$. Сумма векторов $-2\overline{a}$ и $\overline{b}$ представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через $\overline{c}$. Итак, по условию требуется найти скалярное произведение $\overline{c} \cdot \overline{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу $\overline{c} \cdot \overline{d} = |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos < (\overline{c}; \overline{d})$, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов $\overline{c}, \overline{d}$ и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов $\overline{a}, \overline{b}$, поэтому мы пойдём другим путём:

$\overline{c} \cdot \overline{d} = (-2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = -2\overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{b} = -2\overline{a}^2 + \overline{a}\,\overline{b} + 2\overline{a}\,\overline{b} - \overline{b}^2 = -2\overline{a}^2 + 3\overline{a}\,\overline{b} - \overline{b}^2 = -2|\overline{a}|^2 + 3|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos < (\overline{a}\,\overline{b}) - 2|\overline{b}|^2 = -2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (4\sqrt{2}) \cdot 8\, cos\frac{\pi}{4} - 8^2 = -64 + 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32.$

Пример 10: Найти длину вектора $\overline{c}= -\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}|=2$, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение будет следующим:

$\overline{|c|}=|-\overline{a} + 3\overline{b}|=\sqrt{(-\overline{a} + 3\overline{b})^2}=\sqrt{\overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2}=\sqrt{|\overline{a}|^2 - 6|\overline{a}||\overline{b}| \cdot cos < (\overline{a}; \overline{b}) + 9|\overline{b}|^2}=$
$= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2}=\sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$

Ответ: $\overline{c} = 3\sqrt{3}$.

6. *Угол между векторами*

Рассмотрим нашу формулу $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos < (\overline{a}; \overline{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части: $\cos < (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$– это число. Длины векторов $|\overline{a}|, |\overline{b}|$– числа. Значит, дробь $\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$ тоже является некоторым числом *X*. А если известен косинус угла:
$\cos < (\overline{a}; \overline{b})= X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол:
$< (\overline{a}; \overline{b})= arccos\, X$.

Пример 11: Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}|=2\sqrt{2}$, $\overline{a} \cdot \overline{b}=8$.

Решение: Используем формулу:
$\cos < (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}= \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

Итак, если $\cos < (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то: $< (\overline{a}; \overline{b}) = arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по тригонометрической таблице.

Ответ: $<(\overline{a};\overline{b})$ = $arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^0$.

2. *Задания*

а) Даны точки $A(0;2;5)$ и $B(-4;7;15)$. Найти длину вектора $|\overline{BA}|$.

б) Даны векторы $\overline{a}(-2;6)$, $\overline{b}(-4\sqrt{2};2;0)$. Найти их длины.

в) Даны векторы $\overline{a}(1;-2)$; $\overline{b}(2;0)$ и $\overline{c}(-4;2)$. Найти $3\overline{a}-5\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$ и $-2(\overline{a}-2\overline{c})+4\overline{b}$.

г) Найти $\overline{c}\overline{d}$, если $|\overline{c}|=3$, $|\overline{d}|=\sqrt{2}$, а угол между векторами равен135^0.

д) Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}$ = $=-\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}|=8\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=4$, $<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{2}$.

е) Найти длину вектора $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=10$, $<(\overline{a};\overline{b})=\frac{2\pi}{3}$.

ж) Даны $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$ – длины векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и угол между ними $<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\overline{c}=-2\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{d}=4\overline{a}-3\overline{b}$.

3. *Содержание отчёта*

Отчёт должен содержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

4. *Контрольные вопросы*

1. Что называется вектором?
2. Что называется скалярным произведением векторов?
3. Как найти длину вектора?

Практическое занятие №13. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Цель занятия:

– приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*;*

– проверка усвоения знаний по нахождению углов между прямыми. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Оснащение:

– рабочая тетрадь в клетку;

– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

– калькулятор простой.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Прямая на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат: 0 – начало координат, $\bar{i}$, $\bar{j}$ – единичные направляющие векторы осей координат. Рассмотрим на плоскости $0xy$ произвольную прямую l.

Уравнением прямой l называется уравнение, содержащее переменные x**,** y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на l, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на l.

Прямая однозначно определяется:

1) точкой и вектором, перпендикулярным l (нормальным вектором);

2) точкой и вектором, параллельным l (направляющим вектором);

3) ее двумя точками;

4) угловым коэффициентом и начальной ординатой.

В каждом из этих случаев получим соответствующий вид уравнения прямой.

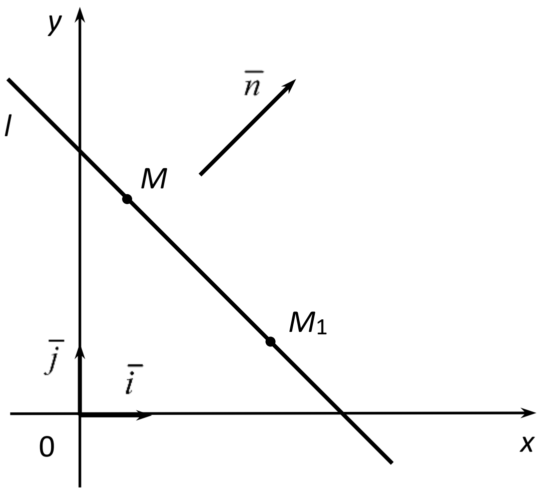


Рис. 4

Пусть прямая l (рис. 4) определена точкой $M_0(x_0,\ y_0)$, лежащей на l, и нормальным вектором $\overline{n}$ (т.е. $\overline{n} \perp l$); $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j}$, (или, что то же самое, $\overline{n}$ ={A, B}).

Пусть $M(x, y)$ – любая точка прямой. Тогда вектор $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ перпендикулярен вектору $\overline{n}$, поэтому скалярное произведение этих векторов равно нулю ($\overline{M_1M} \cdot \overline{n}$ = 0). Выражая это произведение через координаты сомножителей, получим:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0, \qquad (9)$$

т.е. ***уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $M(x_1,\ y_1)$ ***перпендикулярно данному вектору*** $\overline{n}$ = {A, B}.

Преобразуем уравнение (9). Раскрыв скобки и переставив слагаемые, получим:

$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0.$$

Обозначим число $(-Ax_1 - By_1)$ через C и получим:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (10)$$

– ***общее уравнение прямой***.

Итак, уравнение прямой (9) является уравнением первой степени относительно переменных x, y (координат произвольной точки M, которые называются текущими координатами).

Покажем, что любое уравнение первой степени (10) есть уравнение некоторой прямой на плоскости $0xy$. Для этого приведем уравнение (10) к виду (9).

Если $A \neq 0$, то уравнение (10) равносильно уравнению:

$A(x-(-C/A))+B(y-0)=0$.

Если $B \neq 0$, то уравнение (10) равносильно уравнению:

$A(x-0)+B(y-(C/B))=0$.

В любом случае получаем уравнение прямой, проходящей через некоторую точку, перпендикулярно известному вектору $\overline{n}=\{A, B\}$.

Итак, уравнение (10) является уравнением некоторой прямой. Его коэффициенты A, B являются координатами нормального вектора.

Если в уравнении (10) $C = 0$, то прямая l проходит через начало координат.

Если $A = 0$ ($B \neq 0$, $C \neq 0$), т.е. уравнение имеет вид $y = y_1$, ($y_1 = -C/B$), то прямая l параллельна оси $0x$.

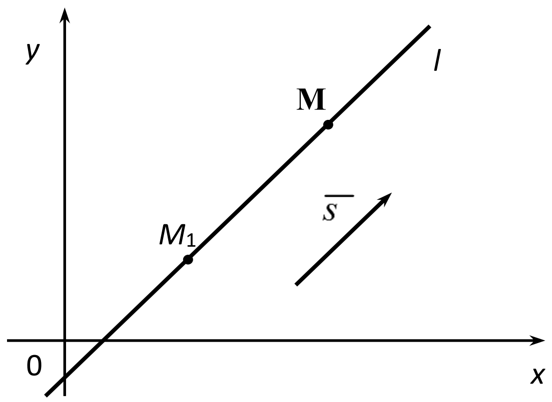


Рис. 5

Если $B = 0$ ($A \neq 0$, $C \neq 0$), т.е. уравнение имеет вид $x = x_1$, ($x_1 = -C/B$), то прямая l параллельна оси $0y$.

Уравнение $y = 0$ ($A = C = 0$) является уравнением оси $0x$, а уравнение $x = 0$ ($B = C = 0$) – уравнением оси $0y$.

Пусть прямая l (рис. 5) задана своей точкой $M_1(x_1, y_1)$ и направляющим вектором $\overline{s}=\{m,n\}$ $(\overline{s}\parallel l)$.

Тогда векторы $\overline{s}$ и $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1\}$ коллинеарны, следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (11)$$

Полученное уравнение является уравнением искомой прямой l и называется ***каноническим.***

Может оказаться, что вектор $\overline{s}$ перпендикулярен одной из осей, тогда, либо $m = 0$ $(\overline{s}\perp 0x)$, либо $n = 0$ $(\overline{s}\perp 0y)$.

В этих случаях каноническое уравнение прямой все равно будем записывать соответственно в виде:

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}, \text{ либо } \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{0}.$$

Пусть прямая l проходит через две заданных точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 6). Тогда векторы $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ коллинеарны, поэтому уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (12)$$

является ***уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Пусть прямая l пересекает оси координат в точках $M_1(0, b)$, $M_2(a, 0)$ (рис. 7). Запишем уравнение прямой l в виде (12) $\frac{x-0}{a-0} = \frac{y-b}{0-b}$, отсюда получаем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (13)$$

Уравнение (13) называется ***уравнением прямой в отрезках*** (a и b – отрезки, отсекаемые прямой l на осях координат).

Пусть прямая l образует с осью $0x$ угол α (рис. 8) и проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. Запишем каноническое уравнение прямой l, взяв в качестве направляющего вектора вектор $\bar{s} = \{m, n\}$ единичной длины, который составляет с осью $0x$ угол α. Очевидно, что $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$ и уравнение прямой l принимает вид:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}.$$

Если $\alpha \neq \pi/2$ (т.е. l не перпендикулярна оси $0x$), то из последнего уравнения получаем:

$$y - y_1 = tg\alpha \cdot (x - x_1).$$

Пусть $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ (это число называется ***угловым коэффициентом*** прямой), тогда можно записать

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \qquad (14)$$

уравнение прямой ***с угловым коэффициентом k, проходящей через данную*** *точку*

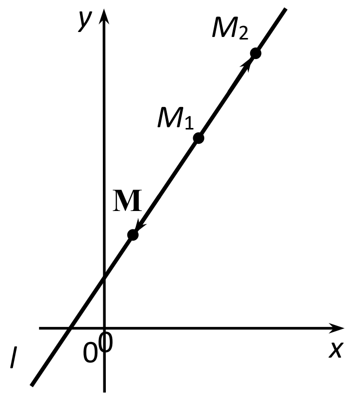


Рис. 6

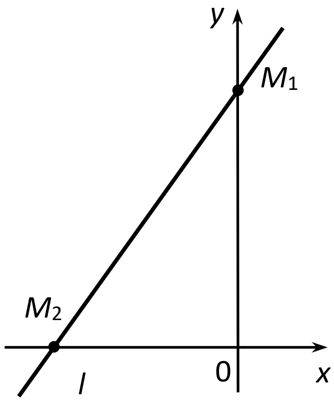


Рис. 7

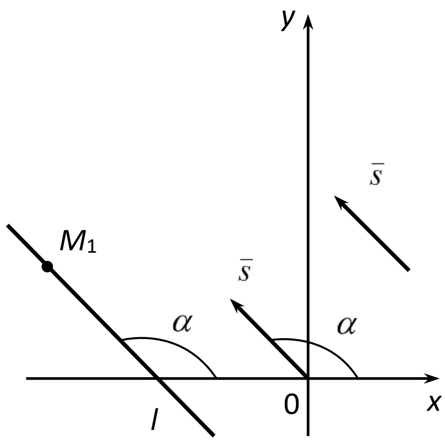


Рис. 8

$M_1(x_1, y_1)$. Уравнение (14) называют также уравнением пучка прямых с центром в точке *(x_1, y_1)*.

Если в качестве точки M_1 взять точку $M_0(0, b)$ пересечения прямой l с осью $0y$ (рис. 9), то уравнение (14) примет вид:

$$y = kx + b\ . \qquad (15)$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой ***с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b***.

Нормальное уравнение прямой:

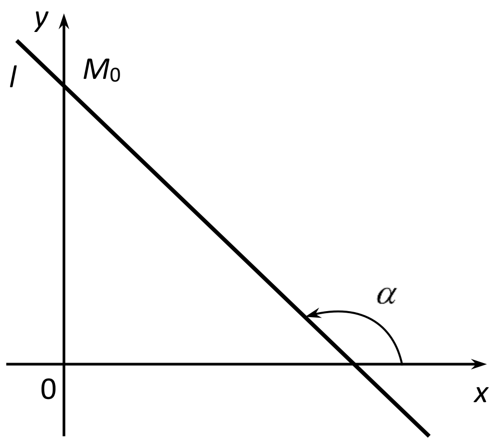


Рис. 9

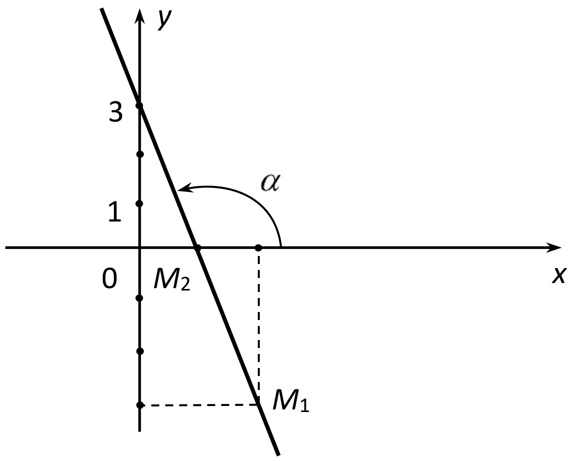


Рис. 10

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

(16)

где p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α - угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox. Общее уравнение прямой (10) можно преобразовать в нормальное уравнение (16) путем умножения на ***нормирующий множитель*** $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны две прямые l_1 и l_2 на плоскости:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \ \ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Чтобы определить их взаимное расположение, достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Если эта система имеет единственное решение (x_0, y_0), то прямые l_1 и l_2, пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$. Если система (17) не имеет решений, то прямые l_1 и l_2 не пересекаются, следовательно, $l_1 \parallel l_2$. Если система (17) имеет бесконечное множество решений, то l_1 и l_2 совпадают.

Однако решить вопрос о взаимном расположении l_1 и l_2 можно и не решая системы (17). Действительно, из общего уравнения прямой l_1, находим, что ее нормальный вектор $\overline{n}$ имеет координаты A_1 и B_1 , т.е. $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, а прямая l_2 имеет нормальный вектор $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2\}$. Если векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ коллинеарны, то прямые l_1 и l_2 либо параллельны, либо совпадают. Если $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ неколлинеарны, то прямые пересекаются. Зная, что коллинеарные векторы (и только они) имеют пропорциональные координаты, получаем:

если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то ***прямые*** l_1 и l_2 ***пересекаются***;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то ***прямые*** l_1 и l_2 ***параллельны***;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то ***прямые*** l_1 и l_2 ***совпадают***.

Используя нормальные векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ можно также найти ***угол между прямыми***, так как угол между нормальными векторами равен одному из углов α между прямыми l_1 и l_2 (рис. 12).

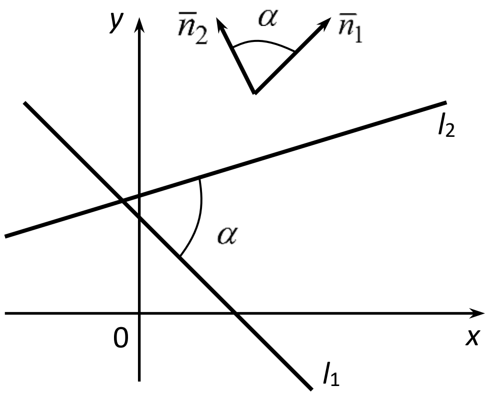


Рис. 12

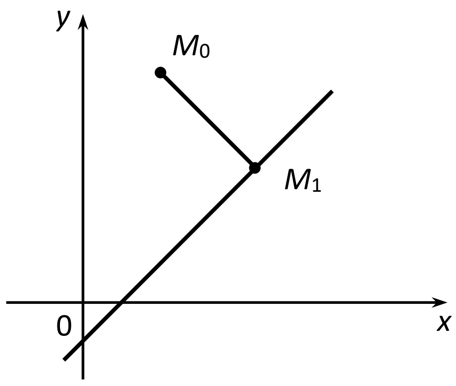


Рис. 13

Из определения скалярного произведения векторов получаем: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$,

поэтому $\alpha = \arccos = \dfrac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$.

Пусть на плоскости заданы прямая $l: Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0,\ y_0)$. Найдем ***расстояние*** *d* ***от точки*** $M_0(x_0,\ y_0)$ ***до прямой*** *l* (рис. 13). Пусть $M_1(x_1,\ y_1)$ – точка пересечения прямой *l* и прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно *l*. Так как M_1 лежит на *l*, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, таким образом, имеем тождество:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \qquad (18)$$

Рассмотрим вектор $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$. Этот вектор коллинеарен нормальному вектору $\overline{n} = \{A_1, B_1\}$ прямой l и $|\overline{M_1M_0}| = d$, поэтому косинус угла между векторами $\overline{n}$ и $\overline{M_1M_0}$ равен либо 1, либо -1. Следовательно, $\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm d \cdot |\overline{n}|$, откуда

$$d = \pm\frac{\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0}}{|\overline{n}|} = \pm\frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C - (Ax_1 + By_1 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Учитывая тождество (18) получаем:

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{или} \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (19)$$

Определение. Под углом между двумя прямыми понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны $К_1$ и $К_2$, вычисляется по формуле

$$tg = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \qquad (1)$$

причем знак "плюс" соответствует острому углу φ, а знак "минус"- тупому.

Заметим, что если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Оу, то формула (1) не имеет смысла. В этом случае острый угол φ вычисляется непосредственно по формуле $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, где φ_1 и φ_2- углы наклона прямых к оси Ох.

Примеры

Найти острый угол между прямыми

$x - 3y + 5 = 0$ и $2x + 4y - 7 = 0$

Решение.

Угловые коэффициенты данных прямых таковы:$k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Тангенс острого угла между этими прямыми найдем по формуле (1):

$$tg\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})}\right| = 1$$

Отсюда φ=$45°$

Задание

› **Выполнить практическую работу по нахождению угла между прямыми:**

Вариант 1.

1**.** Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$;

2) $8x - 2y - 5 =$0 и $2x - 2y + 1 = 0$;

3) $3x + y + 7 = 0$ и $10x + 2y - 3 = 0$;

4) $x + 2y - 8 = 0$ и $5x - y + 3 = 0$.

2. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$ и $B(5; 7)$.

3. Стороны треугольника заданы уравнением $3x - 2y = 6 = 0\ (AB); 2x + y - 10 = 0\ (BC); x - 3y + 2 = 0(AC)$. Найдите углы, которые медиана, проведенная из точки В, образует со сторонами АВ и ВС.

4. Найти внутренние углы треугольника АВС с вершинами А(1;2), В(2;2), С(0;3).

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точу М(-1;2) и составляющий угол $45°$ с прямой $x - 3y + 2 = 0$

Вариант 2.

1**.** Вычислить острый угол между прямыми:

1) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$;

2) $8x - 2y - 5 = 0$ и $2x - 2y + 1 = 0$;

3) $3x + y + 7 = 0$ и $10x + 2y - 3 = 0$;

4) $x + 2y - 8 = 0$ и $5x - y + 3 = 0$.

2. Противоположные вершины квадрата находятся в точках B(-2;2) и D(0:-3). Составить уравнения сторон квадратов.

3. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$ и $B(5; 7)$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике АВС даны вершина острого угла A(1;3) и уравнение противолежащего катета:
$2x - y + 4 = 0(BC)$.
Составить уравнение двух других сторон треугольника.
5. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$ и $B(5; 7)$.

› **Контрольные вопросы:**
1.Угол между двумя прямыми, определение.
2. Формула нахождения tgφ.
3. Какому углу соответствуют "+" и "-" в формуле.
4. Формула нахождения угла φ , если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy.

Практическое занятие №14. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости.
Цель занятия:
– развитие умений и навыков по решению.
Оснащение:
– рабочая тетрадь в клетку;
– раздаточный материал: инструкционные карты-20шт.

1. *Основной теоретический материал*

Представителями *линий второго порядка* являются окружность, эллипс, гипербола, парабола.
Канонический вид уравнения - это общепринятый стандартный вид уравнения, когда в считанные секунды становится ясно, какой геометрический объект оно определяет.

Классификация линий второго порядка:
1. *Окружность и её уравнение*
Каноническое уравнение окружности с центром $O(a;b)$ и радиусом R имеет вид:
$(x-a)^2+(y-b)^2= R^2$.
Пример 1: Составить уравнение окружности с центром O(3; –2) и R=5.
Решение: Подставим a =3, b = –2 и R=5 в каноническое уравнение окружности
$(x-3)^2+(y+2)^2= 5^2$,
Используя формулу сокращённого умножения $(a\pm b)^2= a^2\pm 2ab+ b^2$ получим:

$x^2–6x+9+y^2+4y+4=25$,

$x^2–6x+y^2+4y+9+4–25=0$,

$x^2+y^2– 6x +4y –12=0$ – каноническое уравнение окружности.

Пример 2: Построить окружность $x^2+y^2+ 6x –4y –3=0$.

Решение: Для построения окружности нужно найти центр $O(a;b)$ и радиус R, а так же привести к каноническому уравнению. Для этого:

1) Сгруппируем выражения содержащие одинаковые аргументы: $(x^2+6x) +(y^2 –4y) =3$,

2) Дополним до полного квадрата обе части уравнения: $(x^2+6x+9) +(y^2 –4y+4) =3+9+4$, т.е. $(x+3)^2+(y–2)^2 = 16$.

Из этого уравнения видно, что $a = –3$, $b =+2$ и $R=4$

2. *Эллипс и её уравнение*

Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1F_2, называемых *фокусами* эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$. При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2|<2a$.

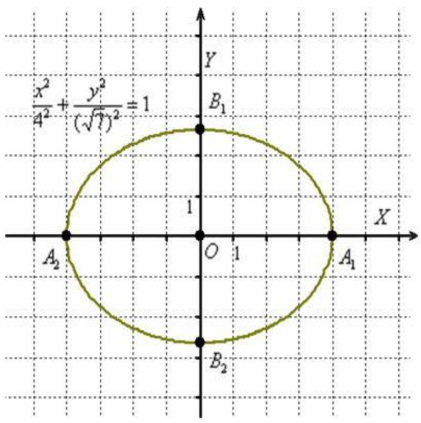
- ✓ *Каноническое уравнение эллипса* имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ($a>b$).
- ✓ *Эксцентриситет эллипса* - это отношение расстояния между фокусами к длине большой оси: $\varepsilon=\frac{c}{a}$ или $\varepsilon=\frac{c}{b}$, где a,b и c связаны между собой соотношением: $c^2= a^2–b^2$ (при $a>b$) или $c^2= b^2–a^2$ (при $b>a$);

причем $0\le \varepsilon<1$.

- ✓ *Фокусы F_1 и F_2* – заданные точки с координатами: $F_1(–c;0)$ и $F_2(c;0)$, если $a>b$; $F_1(0; –c)$ и $F_2(0; c)$, если $b>a$.
- ✓ *Фокусное расстояние:* $|F_1F_2| = 2c$.
- ✓ *Большая ось:* $|A_1A_2| = 2a$.
- ✓ *Малая ось:* $|B_1B_2| = 2b$.

Пример 3: Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Решение: Сначала приведём уравнение к каноническому виду: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$



Одно из преимуществ канонического уравнения заключается в том, что оно позволяет моментально определить вершины эллипса, которые находятся в точках $A_1(a;0)$, $A_2(–a;0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0;–b)$. Легко заметить, что координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению.

В данном случае: $A_1(4;0)$, $A_2(–4;0)$, $B_1(0; \sqrt{7})$, $B_2(0;– \sqrt{7})$

Пример 4: Найти координаты F_1 и F_2, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2+y^2=32$.

Решение: 1) Приведем уравнение к каноническому виду: $\frac{2x^2}{32}+\frac{y^2}{32}=\frac{32}{32}$,

$\frac{2x^2}{32}+\frac{y^2}{32}=1$. Следовательно: $a^2=16$, $a=4$; $b^2=32$, $b=\sqrt{32}=8\sqrt{2}$. Так как $b>a$, то $c^2= b^2–a^2 =32–16=16$, $c=4$.

- ✓ Итак: $F_1(0;4)$, $F_2(0; –4)$.
- ✓ Большая ось: $|A_1A_2| = 2a =2\cdot4=8$.
- ✓ Малая ось: $|B_1B_2| = 2b= 2\cdot4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.
- ✓ Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{4}{4\sqrt{2}}\approx0,705$.

Пример 5: Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось $2b$=6, а расстояние между фокусами $|F_1F_2|$=8.
Решение: Так как $2b$=6, то b=3; $|F_1F_2|=2c$, следовательно c=4; $a^2= c^2+b^2$=16+9=25, a=5.
Каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

3. ***Гипербола и её уравнение***

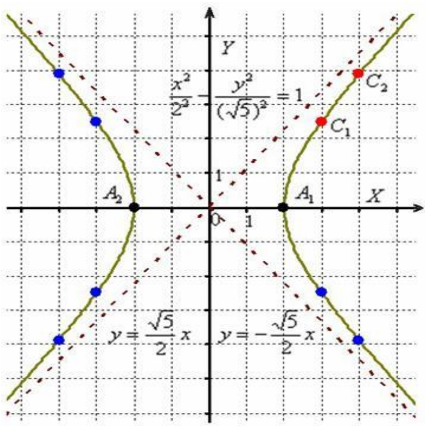
Гипербола – это множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называется *фокусами*) есть величина постоянная.

- ✓ *Каноническое уравнение гиперболы* имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ где a, b и c связаны между собой равенством $c^2= a^2+ b^2$.
- ✓ *Фокусы F_1 и F_2* – заданные точки с координатами: F_1 (–c;0) и F_2(c;0), если $a>b$, F_1 (0; –c) и F_2(0; c), если $b>a$.
- ✓ *Фокусное расстояние:* $|F_1F_2|$ = 2c.
- ✓ *Действительная ось:* $|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2|$ = 2a.
- ✓ *Мнимая ось:* $|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2|$ = 2b.
- ✓ *Эксцентриситет:* $\varepsilon=\frac{c}{a}$ или $\varepsilon=\frac{c}{b}$
- ✓ *У гиперболы две симметричные ветви.*
- ✓ *У гиперболы две асимптоты:* $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Как построить гиперболу?

1. Прежде всего, находим асимптоты – это прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$
2. Теперь находим две вершины гиперболы, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$. Выводится элементарно: если y=0,то каноническое уравнение превращается в $\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда и следует, что $x^2 = a^2 \rightarrow x = a$, $x = -a$
3. Ищем дополнительные точки. Обычно хватает двух-трёх. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей, поэтому вычисления достаточно провести для 1-й координатной четверти.

Пример 6: Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$.
Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,
$\frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=\frac{20}{20}$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$



Находим асимптоты: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ и $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$
Находим две вершины гиперболы $A_1(2;0)$, $A_2(-2;0)$.
Ищем дополнительные точки: $\frac{y^2}{5}=\frac{x^2}{4}-1$,
$y^2=\frac{5}{4}(x^2-4)$,
$y=\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-4)}$,
C_1: x =3, $y=\frac{1}{2}\sqrt{5(3^2-4)}=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}$=2,5
C_2: x =4, $y=\frac{1}{2}\sqrt{5(4^2-4)}=\frac{\sqrt{60}}{2}\approx 3{,}87$

Пример 7: Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, заданного уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.
Решение: Приведём к каноническому виду $\frac{16x^2}{400}-\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$.
Следовательно, a =5, b =4, $c^2= a^2+ b^2$ = 25+16 = 41, $c=\sqrt{41}$, $a>b$

- ✓ $F_1(\sqrt{41}; 0)$, $F_2(-\sqrt{41}; 0)$
- ✓ Действительная ось: $|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2|$ = 2a = 10.

- ✓ Мнимая ось: $|B_1B_2|$ = 2b = 8.
- ✓ Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{5}$
- ✓ Уравнение асимптоты: y= $\pm\frac{4}{5}x$.

Пример 8: Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусом на оси абсцисс, если известно, что эксцентриситет равен 1,5, а фокусное расстояние равно 6.

Решение: $|F_1F_2|$ = 6, следовательно, 2c = 6, c = 3; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ следовательно, $a = \frac{c}{\varepsilon}$ = $\frac{3}{1{,}5}$ = 2.

Зная a и c, найдём $b^2 = c^2 - a^2$ = 9– 4 = 5.

Каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

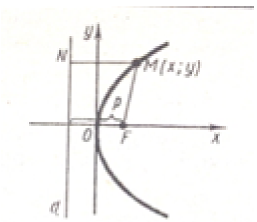
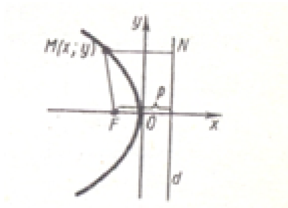
4. *Парабола и её уравнение*

Парабола – это множество точек плоскости, равноудалённых от заданной точки (называемой *фокусом*) и данной прямой (называемой *директрисой* d).

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

y^2 =2px или y^2= –2px.

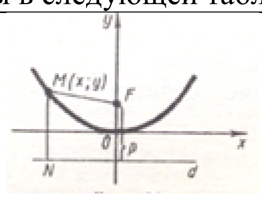
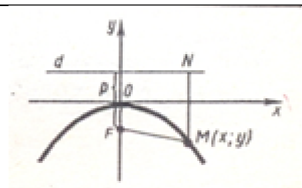
Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F(\frac{p}{2}; 0)$	$F(-\frac{p}{2}; 0)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	y^2 =2px	y^2= –2px

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид:

x^2 =2py или x^2= –2py.

Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F(0; \frac{p}{2})$	$F(0; -\frac{p}{2})$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$

Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

Пример 9: Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение: Каноническое уравнение $y^2 = 2px$, следовательно $2p = 8$, $p = 4$. $F = \frac{p}{2} = 2$, следовательно $F(2;0)$ – фокус параболы. Уравнение директрисы d: $x = -\frac{p}{2} = -2$.

Пример 10: Найти каноническое уравнение параболы и уравнение её директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты $(0; -3)$.

Решение: Согласно условию фокус параболы расположен на отрицательной полуоси Oy, следовательно, $x^2 = -2py$.

Так как $-\frac{p}{2} = -3$, то $p=6$, $2p=12$.

Уравнение параболы: $x^2 = -12py$.

Уравнение директрисы $y = \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$ или $y - 3 = 0$.

Пример 11: Составить уравнении параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной оси Ox и проходящей через точку $A(-3; -6)$.

Решение: Уравнение параболы: $y^2 = -2px$, $(-6)^2 = -2p\cdot(-3)$, $36 = 6p$, $p = 6$; $y^2 = -12x$.

2. ***Задания:***

1) Составить уравнение окружности с центром $O(-2; -5)$ и $R=\sqrt{3}$; $O(-5; 0)$ и $R=3$.
2) Построить окружность: а) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$; б) $x^2+y^2-10x+9=0$; в) $x^2+y^2+8x+7=0$.
3) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением: а) $16x^2+25y^2=400$; б) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.
4) Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого $F_1(-4;0)$, $F_2(7;0)$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,28$.
5) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси координат, эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$ и малая ось равна 10.
6) Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\sqrt{3}; 0)$ и $(-\sqrt{3}; 0)$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.
7) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, заданного уравнением: $7x^2 - 9y^2 = 63$.
8) Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси ординат, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
9) Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 10, а уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\frac{5}{3}x$
10) Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ординат равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что $2b = 10$.
11) Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы точка $A(-2; 0)$.
12) Парабола задана уравнение $x^2 = -32y$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.
13) Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Oy и проходит через точку $A(-5; 2)$. Составить каноническое уравнение параболы.
14) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

3. ***Содержание отчёта***

Отчёт должен содержать:

1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

4. Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
3. Запишите каноническое уравнение параболы.