Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финуниверситет)

Самарский финансово-экономический колледж
(Самарский филиал Финуниверситета)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по учебно-методической работе
____________________ Л.А Косенкова
« 21 » февраля 20 22 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЕН.02 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 09.02.07 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Самара – 2022

Методические указания по организации и выполнению практических занятий разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» и в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного приказом Министерства образования науки Российской Федерации от 09.12.2016 года № 1547
Присваиваемая квалификация: администратор баз данных

Разработчики:

Буслаева Е.П. ____________ Преподаватель Самарского филиала Финуниверситета

Методические указания по организации и выполнению практических занятий рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании предметной (цикловой) комиссии естественно-математических дисциплин

Протокол от «24» января 2022 г. № 5

Председатель ПЦК ____________ М.В. Писцова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий по предмету ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики разработаны для студентов второго курса специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и преподавателям по организации практических занятий по изучаемой дисциплине, в соответствии с требованиями федерального государственного стандарта среднего профессионального образования.

Практические занятия направлены на формирование практических учебных умений применения методов дискретной математики к решению различных задач. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Содержанием практических занятий является решение различных примеров и задач по дискретной математике. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практического занятия используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая работа оформляется в тетради для практических занятий. В оформление работы входит запись номера практического занятия, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Методические указания направлены на формирование и развитие у студентов общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Целью дисциплины является овладение студентами математическим аппаратом, необходимым для применения математических методов в практической деятельности и в исследованиях.

В результате изучения дисциплины обучающийся **должен**

приобрести практический опыт: применение логических операций, математической логики в решении профессиональных задач.

уметь:

- применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;
- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

знать:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;

– методы минимизации алгебраических преобразований;
– основы языка и алгебры предикатов;
– основные принципы теории множеств.

Задачи дисциплины:

– ознакомить с основными понятиями, языком и методами математической логики;
– подготовить к изучению ряда смежных дисциплин, основой которых является математическая логика;
– продемонстрировать неразрывную связь методов математической логики и компьютеров; показать, что эти методы используются в двух сферах, связанных с компьютерами.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Объем часов**
Объём образовательной программы учебной дисциплины	46
Объём работы обучающихся во взаимодействии с преподавателем	36
в том числе:	
теоретическое обучение	22
практические занятия	14
самостоятельная работа	10
Промежуточная аттестация в форме комплексного дифференцированного зачёта	

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Формулы логики. Построение таблиц истинности.

Практическое занятие №2. Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ.

Практическое занятие №3. Множества и основные операции над ними.

Практическое занятие № 4. Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок.

Практическое занятие №5. Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.

Практическое занятие №6. Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов.

Практическое занятие №7. Работа машины Тьюринга.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Формулы логики. Построение таблиц истинности.

Цель занятия:

– научиться формализовывать высказывания и строить таблицы истинности для формул логики.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Формулой алгебры логики называется всякое составное высказывание, содержащее логические переменные и знаки логических операций. Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Пример 1. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

Решение. Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» - $\overline{A}$; «если нет дождя, то будет солнечная погода» - $\overline{A} \to B$;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» - $A \leftrightarrow C$.

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т.е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: $(\overline{A} \to B)\&(A \leftrightarrow C)$. Т.к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом: $\overline{(\overline{A} \to B)\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}$.

Ответ: $\overline{(\overline{A} \to B)\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}$.

Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности, позволяющую определить истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений логических переменных.

Пример 2. Построить таблицы истинности для формулы $(\overline{X} \vee X) \leftrightarrow (X \to Y\&\overline{Z})$.

Решение. Определим количество строк и столбцов в таблице. Т.к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 2^3 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий $(\overline{X}^1\vee^2X)\leftrightarrow^6(X\rightarrow^5Y\&^4\overline{Z}^3)$. Заполняем таблицу:

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{X}\vee X$	$\overline{Z}$	$Y\&\overline{Z}$	$X\rightarrow Y\&\overline{Z}$	$(\overline{X}\vee X)\leftrightarrow(X\rightarrow Y\&\overline{Z})$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

В следующих высказываниях выделить простые, обозначив каждое из них буквой. Записать составное высказывание с помощью формулы логики.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
А) На уроке физики ученики выполняли лабораторную работу и сообщали результаты исследований учителю Б) Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя С) Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю	А) Катя любит писать сочинения или решать задачи. Б) Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождя С) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.	А) Если Маша сестра Саши, то Саша брат Маши Б) Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
А) Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхает Б) Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не делится на 10	А) Земля движется по круговой или эллиптической орбите Б) Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда, когда будет пасмурная погода С) Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.	А) Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньги Б) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда когда нет ветра С) Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15.

Задание 2.

Построить таблицы истинности для формул:

I вариант	II вариант	III вариант
$\overline{x \leftrightarrow y} \vee x$	$\overline{x \rightarrow y} \& x$	$(x \& y) \rightarrow \overline{x}$
$(x \& y \vee \bar{z}) \leftrightarrow (\bar{y} \rightarrow z)$	$(x \rightarrow y \& \bar{z}) \vee \overline{(x \& y)}$	$(\bar{x} \rightarrow y) \leftrightarrow (x \vee y \& \bar{z})$
$\overline{((X \vee Y) \& (Z \leftrightarrow X))} \& (Z \vee Y)$	$(X \& Y) \& \overline{(\overline{X} \vee X)} \& (Z \leftrightarrow Y)$	$\overline{((X \vee Z) \& (Z \leftrightarrow X))} \& (Z \rightarrow Y)$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$(\overline{x} \vee y) \leftrightarrow x$	$x \rightarrow (\overline{x \& y})$	$x \leftrightarrow (\overline{x \vee y})$
$(x \leftrightarrow \bar{y}) \& (x \rightarrow z) \vee \bar{x}$	$(\bar{x} \vee z) \rightarrow (x \vee y \& \bar{z})$	$(x \vee y \vee \bar{z}) \& (\overline{x \rightarrow y})$
$\overline{(X \vee Y)} \vee (Z \rightarrow x) \& (Z \leftrightarrow Y)$	$(X \leftrightarrow Y) \& \overline{(Z \vee D)}$	$(A \rightarrow B) \vee \overline{A} \& (C \leftrightarrow D)$

Задание 3.

С помощью таблицы истинности установить, равносильны ли следующие формулы

I вариант	II вариант	III вариант
$\overline{A \& B}$ и $A \vee B$	$\overline{B \vee A}$ и $\overline{\overline{B} \& \overline{A}}$	$A \vee \overline{B}$ и $\overline{A} \& \overline{B}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$\overline{A} \& B$ и $\overline{A \vee B}$	$B \vee A$ и $\overline{\overline{B} \& A}$	$A \vee B$ и $\overline{A \& \overline{B}}$

Задание 4.

Символом F обозначается одно из указанных ниже логических выражений. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

Варианты I, III

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1) $\overline{X} \& Y \& \overline{Z}$
2) $X \vee \overline{Y} \vee Z$
3) $X \& \overline{Y} \& Z$
4) $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}$

Вариант II, IV

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

1) $X \vee Y \vee Z$
2) $X \& Y \& \overline{Z}$
3) $\overline{X} \& Y \& \overline{Z}$
4) $X \vee \overline{Y} \vee Z$

Вариант III, V

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

1) $(X \vee \overline{Y}) \& Z$
2) $(X \& \overline{Y}) \vee Z$
3) $X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$
4) $X \& \overline{Y} \& \overline{Z}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем разница между простыми и составными высказываниями?
2. Что такое таблица истинности?
3. Как определяется количество строк в таблице истинности?

Практическое занятие №2. Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ.
Цель занятия:
– научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Нормальная форма называется **минимальной**, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

Минимальная нормальная форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). **Тупиковой нормальной формой** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

Пример 1. Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а) составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Решение.

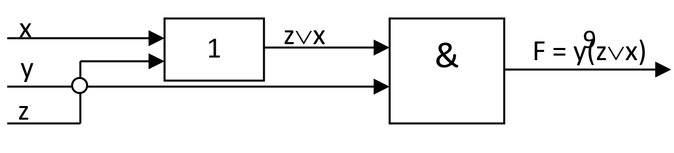
а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}yz \vee xyz) \vee xy\bar{z} = yz(\bar{x} \vee x) \vee xy\bar{z} = yz \vee xy\bar{z} = y(z \vee x\bar{z}) = y(z \vee x)(z \vee \bar{z}) = y(z \vee x)$

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:



Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2^n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с 2^3 = 8 клетками:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1				
$\bar{z}$ 0				

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с 2^4 = 16 клетками.

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}d$	zd	$z\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

Пример 2. Дана функция $F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

Решение

1 способ: с помощью равносильных преобразований

$F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz) \vee (xy\bar{z} \vee xyz) = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) \vee xy(\bar{z} \vee z) = \bar{x}y \vee xy = y(\bar{x} \vee x) = y$

2 способ: с помощью карт Карно

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

2. Обведем единицы попарно двумя контурами.
3. В первом контуре не меняются переменные $\bar{x}y$, во втором – переменные xy.
4. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: $\mathbf{F(x,y,z) = \bar{x}y \vee xy = y}$.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная у, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

Ответ: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

Пример 3. Построить минимальную форму для булевой функции, заданной таблично.

x	**y**	**z**	**F**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1			1	
$\bar{z}$ 0	1	1	1	1

2. Обведем единицы в два контура.
3. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные xy.
4. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = z∨xy**.

Ответ: F(x,y,z) = z∨xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Привести СДНФ к минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

I вариант	**II вариант**
$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$	$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$
III вариант	**IV вариант**
$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$	$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$

Задание 2.

Для данной булевой функции а) составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**	**IV вариант**
F(x,y,z) = (11001000)	F(x,y,z) = (01010100)	F(x,y,z) = (11000100)	F(x,y,z) = (00110010)

Задание 3. Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

I вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}d$	zd	$z\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				
$x\bar{y}$	1		1	1

II вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}d$	zd	$z\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$		1	1	
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				1
$x\bar{y}$		1	1	

III вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}d$	zd	$z\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$	1	1		
1xy				
$x\bar{y}$		1	1	1

IV вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}d$	zd	$z\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$			1	1
1xy	1			
$x\bar{y}$	1	1		

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие еще существуют методы минимизации булевых функций?
2. Почему при построении логических схем удобнее использовать минимальную форму булевой функции?

Практическое занятие №3. Множества и основные операции над ними.

Цель занятия:

– научиться выполнять операции над множествами и представлять множества кругами Эйлера.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, образует **множество**. Над множествами можно совершать следующие операции:

1. **Объединение (A∪B)** – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А и В.
2. **Пересечение (A∩B)** – включает элементы, которые одновременно принадлежат А и В.
3. **Разность (A\B)** – включает элементы, которые принадлежат А и не принадлежат В.
4. **Дополнение (А’)** – включает элементы, которые не принадлежат множеству А (т.е. дополняют его до универсального U).
5. **Декартово произведение (АхВ)** – включает упорядоченные пары (a, b), в которых первый элемент a ∈A, второй элемент b ∈ B.

Пример 1. На множестве U букв русского алфавита заданы множества:

A = {л, о, г, и, к, а}

B = {у, р, о, к}

С = {г, р, у, п, п, а}

Найти следующие множества: А) (A∩B)∪C;   Б) (A∪B)∩C; В) U\(A∪B∪C)

Решение

<u>А) (A∩B)∪C</u>

Сначала определим пересечение множеств А и В (A∩B), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам А и В.

A∩B = {о, к}

Объединим получившиеся пересечение с множеством С. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: (A∩B)∪C = {о, к, г, р, у, п, п, а}

<u>Б) (A∪B)∩C</u>

Объединение множеств A∪B = {л, о, г, и, к, а, у, р}

(A∪B)∩C = {г, а, у, р}

<u>В) U\(A∪B∪C)</u>

Объединение множеств A∪B∪C = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}

Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности U\(A∪B∪C) будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение (A∪B∪C)

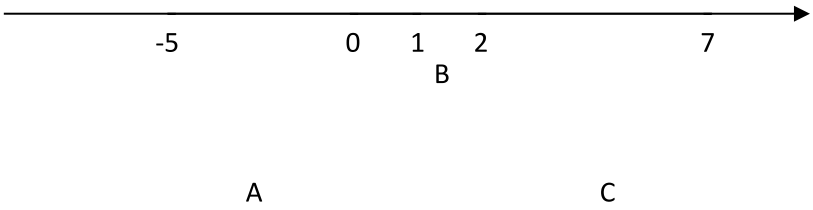
U\(A∪B∪C) = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}

Пример 2. Даны отрезки A = [-5, 1], B = [0, 2], C = [2, 7].

Найти следующие множества: А) (A∪B); Б) (A∩B)∪C; В) (C∪B)\(A∩B)

Решение

Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:



А) (A∪B) = [-5, 2]

Б) (A∩B)∪C = [0, 1] ∪C = [0, 1] ∪ [2, 7].

В) (C∪B)\(A∩B) = [0, 7] \ [0, 1] = [1, 7]

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Укажите множество элементов множества, соответствующие записи. Выпишите один элемент, принадлежащий множеству, и один элемент, не принадлежащий этому множеству.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$M = \{x \mid x^2 + 2x + 2 > 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - x - 12 \le 0\}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$M = \{x \mid x^2 + x - 20 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 8x - 9 \ge 0\}$	$M = \{x \mid x^2 + 10x + 21 > 0\}$

Задание 2. На множестве U букв русского алфавита заданы множества A, B, C. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.

А) (A∩B)∪C; Б) (A∪B)∩C; В) U\(A∪B∪C)

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
A = {д, о, с, к, а} B = {л, о, д, к, а} C = {к, н, и, г, а}	A = {г, р, у, ш, а} B = {б, у, г, о, р} C = {к, н, и, г, а}	A = {м, о, р, я, к} B = {я, к, о, р, ь} C = {к, р, о, н, а}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = {б, и, л, е, т} B = {б, и, р, к, а} C = {т, а, л, о, н}	A = {з, а, в, о, д} B = {н, а, р, о, д} C = {д, о, с, к, а}	A = {п, а, л, е, ц} B = {ц, а, п, л, я} C = {п, е, т, л, я}

Задание 3. Даны отрезки A, B, C. Найти следующие множества:

А) $(A \cup B)$;   Б) $(A \cap B) \cup C$; В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
A = [-2, 7]; B = [3, 10]; C = [5, 15]	A = [-4, 2]; B = [0, 6]; C = [3, 9]	A = [0, 8]; B = [4, 12]; C = [9, 20]
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = [-6, 0]; B = [-3, 5]; C = [2, 8]	A = [0, 4]; B = [2, 9]; C = [5, 11]	A = [-1, 8]; B = [4, 13]; C = [6, 17]

Задание 4.

Даны множества А, В. Определить декартово произведение множеств А) АхВ;   Б) АхА

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
A = {8, 9, 10} B = {а, б}	A = {а, б, с} B = {3, 4}	A = {5, 6, 8} B = {л, к}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = {о, п, р} B = {0, 1}	A = {1, 5, 10} B = {к, н}	A = {д, г, в} B = {20, 21}

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими способами можно задать множество?
2. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции?

Практическое занятие № 4. Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок.
Цель занятия:
– научиться определять свойства бинарных отношений, выполнять операции над бинарными отношениями и подстановками.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Бинарным отношением называется любое непустое подмножество R декартова произведения XxY множеств X и Y.

Запись бинарного отношения: xRy, читается как «x и y находятся в отношении R.

Свойства бинарных отношений.

1. **Рефлективность**: xRx.
2. **Антирефлективность**. Имеет место, когда отношение не обладает свойством рефлективности для любых x.
3. **Симметричность.** Если для любых x и y одновременно справедливо xRy и yRx.
4. **Антисимметричность**. Если для несовпадающих элементов x и y верно отношение xRy, то ложно yRx.
5. **Транзитивность.** Если xRy и yRz, то xRz.

6. **Антитранзитивность.** Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.
7. **Полнота (или связность)**. Для любых x и y выполняется либо xRy, либо yRx, либо и то и другое.

Пример 1. Определите, является ли отношение «соседи по дому» на множестве людей рефлективным, симметричным и транзитивным.

Решение.

Пусть M – множество соседей. Проверим выполнение свойств рефлективности, симметричности и транзитивности для отношения R(x,y) = «x сосед y»

А) Отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, так как любой человек не является своим соседом.

«x сосед x» - ложно.

Б) Оно симметрично. Например, если Иванов – сосед Петрова, то справедливо, что Петров – сосед Иванова.

Если «x сосед y», то «y сосед x».

В) отношение не транзитивно. Например, если дом Петрова расположен строго между домами Иванова и Сидорова, то Иванов с Петровым и Петров с Сидоровым – соседи, но Иванов и Сидоров соседями не являются.

Из того, что «x сосед y» и «y сосед z» не следует «x сосед z».

Ответ: отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, симметрично, не транзитивно.

Пример 2. Определите является отношение R(x,y) = «x – y есть целое число» отношением рефлективности, симметричности и транзитивности. Является ли данное отношение отношением эквивалентности?

Решение

№	Свойство	Конкретный пример выполнения алгоритма
1	Рефлективность	Проверим R(x,x): $x - x = 0 \in Z$ Отношение R рефлективно.
2	Симметричность	Если разность x – y есть целое число, то и разность $y - x = -(x - y)$ – противоположное исходному целому, и поэтому тоже целое число. Отношение R симметрично.
3	Транзитивность	Пусть $(x - y) \in Z$ и $(y - z) \in Z$ Тогда $(x - z) = (x - y) + (y - z)$ есть сумма целых числе, т.е. $(x - z) \in Z$. Отношение R транзитивно.

Ответ: отношение «x – y есть целое число» на множестве целых числе рефлективно, симметрично, транзитивно, следовательно отношение эквивалентно.

Пример 3. На множестве M = {a, b, c, d, e} задано бинарное отношение R(M) = {(a, a), (a, b),

(b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}. Построить отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Решение

1) По определению **обратное бинарное отношение** должно содержать все обратные пары исходного бинарного отношения:
   R^{-1} = {(a, a), (b, a), (c, b), (d, c), (d, d), (e, d)}
2) По определению на множестве M = {a, b, c, d, e} **дополнительное** к R(M) бинарное отношение должно содержать все пары из декартова произведения, которые не принадлежат к R(M).
   $\overline{R}$ = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}
3) По определению **тождественное бинарное отношение** состоит из тождественных элементов.
   U = {(a, a), (b, b),(c, c), (d, d), (e, e)}
4) По определению универсальное бинарное отношение содержит все пары из декартова произведения.
   I = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

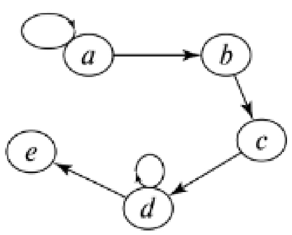
Существуют несколько основных способов задания бинарных отношений: перечисление, графическое представление, матричное представление.

При графическом представлении каждый элемент множества M представляется вершиной, а пара (x, y) представляется дугой из x в y.

Матричным способом бинарные отношения задаются с помощью матрицы смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу m x m, где m – мощность множества M и каждый ее элемент равен единице, если пара (x, y) принадлежит R(M), и равен нулю в противном случае.

Пример 4. Записать графическое и матричное представление для R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}}

Решение



	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	1	1	0	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	0	0	1	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	0

Взаимно-однозначное отображение множества {1,2,3, …,n} на само себя называется **подстановкой** n чисел, где n – степень подстановки.

Обычно подстановку записывают в виде двух строк, заключенных в скобки. При этом в первой строке аргументы (первые координаты), а во второй строке в соответствующие им образы (вторые координаты).

Пример 5. Дана подстановка:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду

2) Найдите обратную подстановку σ_1^{-1}

3) Найдите квадрат подстановки σ_1^2

Решение

1) В верхней строке запишем числа в порядке возрастания от 1 до 5. В нижней – соответствующие им значения $\sigma_1(1) = 5$, $\sigma_1(2) = 4$, $\sigma_1(3) = 1$, $\sigma_1(4) = 2$, $\sigma_1(5) = 3$. Получим $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **- канонический вид подстановки**
2) В каноническом виде подстановки σ_1 поменяем строки местами и упорядочим пары (приведем к каноническому виду) по новой первой строке. $\sigma_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – **обратная подстановка**
3) Определим квадрат подстановки σ_1^2

А) поменяем в каноническом виде подстановки σ_1 порядок столбцов так, чтобы новая строка повторяла старую вторую.

$$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Б) подпишем подстановку $\sigma_1{}'$ под постановкой σ_1 и вычеркнем одинаковые вторую и третью строки:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Получим

$\sigma_1{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **квадрат подстановки**

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1.

Объясните, будет ли выполнима рефлективность, симметричность или транзитивность отношений на заданных множествах, и почему:

I вариант «быть знакомым» на множестве людей

II вариант «быть отцом» на множестве людей

III вариант «играть в одном спектакле» на множестве актеров

IV вариант быть одногруппником» на множестве людей

Задание 2.

Определите является ли преложенное отношение рефлектиным, симметричным и транзитивным.

I вариант «x/y – целое число»

II вариант «x/y – рациональное число»

III вариант «x + y – четное число»

IV вариант «x^y – четное число»

Задание 3. На множестве M = {a, b, c, 1, 2} задано бинарное отношение R(M).

А) Постройте отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Б) Запишите графическое и матричное представление данных бинарных отношений.

I вариант R(M) = {(a, 2), (b, 1), (b, 1), (c, c), (c, 2), (2, 2)}

II вариант R(M) = {(a, b), (a, 1), (b, b), (c, 2), (1, 2), (2, 2)}

III вариант R(M) = {(a, a), (a, c), (b, c), (b, 1), (c, c), (2, 2)}

IV вариант R(M) = {(a, c), (b, b), (b, c), (c, 1), (1, 1), (1, 2)}

Задание 4. Выполните операции над подстановками

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду

2) Найдите обратную подстановку σ_1^{-1}

3) Найдите произведение подстановок $\sigma_1 \circ \sigma_2$

4) Найдите квадрат подстановки σ_1^2

I вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

II вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

III вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

IV вариант $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое бинарное отношение обладает свойством эквивалентности?
2. Что такое отображение?

Практическое занятие №5. Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.

Цель занятия:

– научиться находить область определения и истинности предиката; выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы; строить отрицания к высказываниям, содержащим кванторы.

Для выполнения работы необходимо знать основы языка и алгебру предикатов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

Пример 1. Найти множество истинности предиката P(x): $6x^2 - 24 = 0$, если его область определения множество всех действительных чисел.

Решение

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

$6x^2 - 24 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: Множество истинности T(P) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

Пример 2. На множестве M = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); A(x) ∨ C (x); $\overline{B}$ (x); B(x) → D (x) и найти их множества истинности.

Решение

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:
   T(A) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}
   T(B) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}
   T(C) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
   T(D) = {5, 10, 15, 20}
2. A(x) & D(x): «число x не делится на 4 и кратно 5»
   T(A&D) = {5, 15}
3. A(x) ∨ C (x): «число x не делится на 4 или простое»
   T(A∨C) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}

4. $\overline{A}$ (x): «x делится на 4» T($\overline{A}$) = {4, 8, 12, 16, 20}
5. B(x) → D (x): «если x нечетное число, то оно кратно 5»
   T(B→D) = T ($\overline{B}$∨D)
   T ($\overline{B}$) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
   T ($\overline{B}$∨D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

Квантор общности (универсальный квантор) - ∀x.

∀xP(x) – для всех (любого) x истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат P(x) выполняется для каждого значения переменного x.

Квантор существования - ∃x.

∃xP(x) – существует x, такой что истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях x выполняется предикат P(x).

Пример 3. Запишите высказывание для символичной записи $(\exists x)(\exists y)$: $(x^2+ y^2 > 25)$.

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

Решение

Данную запись можно представить высказыванием: существует x и существует y, такие что $x^2+ y^2 > 25$. Высказывание является истинным, т.к. можно найти пару чисел x и y, для которых будет выполняться выражение $x^2+ y^2 > 25$ (например, x = 3 и y = 5).

Пример 4. Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

Решение

1. Найдем область определения
   M: x – множество всех улиц
   y – множество всех праздников
2. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.
   Данное высказывание в символичной форме запишется в виде: $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор $\frac{\text{общности } (\forall)}{\text{существования } (\exists)}$, достаточно заменить его на другой квантор $\frac{\text{существования } (\exists)}{\text{общности } (\forall)}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

Пример 5. Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) A: «Некоторые люди любят есть репу»

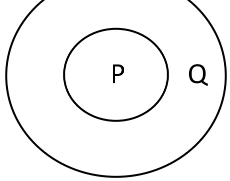
Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все p есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество p, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые p есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества p и q, непусто.



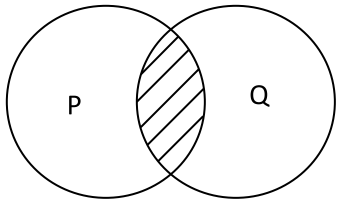


рис. 1 рис. 2

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

I вариант	II вариант
А) **P (x):** $x^2 - 4 = 0$; Б) **Q(x):** $3x - 2 < 17$	А) **P (x):** $2x^2 - 18 = 0$; Б) **Q(x):** $2x + 3 < 15$
III вариант	**IV вариант**
А) **P (x):** $3x^2 - 12 = 0$; Б) **Q(x):** $5x - 4 > 29$	А) **P (x):** $x^2 - 9 = 0$; Б) **Q(x):** $4x + 6 > 12$

Задание 2. На множестве M = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

I вариант	II вариант
$A(x)\ \&\ B(x)$; $C(x) \vee D(x)$; $\overline{B}(x)$; $A(x) \rightarrow C(x)$;	$C(x)\ \&\ B(x)$; $B(x) \vee D(x)$; $\overline{C}(x)$; $C(x) \rightarrow A(x)$;
III вариант	**IV вариант**
$C(x)\ \&\ D(x)$; $B(x) \vee C(x)$; $\overline{A}(x)$; $D(x) \rightarrow C(x)$;	$B(x)\ \&\ D(x)$; $A(x) \vee B(x)$; $\overline{D}(x)$; $A(x) \rightarrow B(x)$;

Задание 3. Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

I вариант	II вариант
$(\exists x)(\forall y): (x + y = 10)$ $(\forall x)(\exists y)(\exists z): x*y = z$	$(\forall x)(\exists y): (x + y = 8)$ $(\forall x)(\forall y): (x>y)$
III вариант	**IV вариант**
$(\forall x)(\exists y)(x - y = 7)$ $(\forall x)(\forall y): (x+y>0)$	$(\exists x)(\forall y)(x - y = 5)$ $(\forall z)(\exists y)(\exists x): x + y = z$

Задание 4. Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

I вариант	**II вариант**
У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.	Существуют города, которые больше Москвы. На каждом доме есть номер.
III вариант	**IV вариант**
Каждое материальное тело имеет массу. Существуют кустарники, которые больше чем деревья.	Некоторые космические тела являются астероидами. У любой группы есть классный руководитель

Задание 5. Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы**.**

I вариант	**II вариант**
Все планеты имеют атмосферу. Некоторые люди ходят в театр.	Некоторые студенты учатся на «отлично». Все птицы улетают зимой в теплые края.
III вариант	**IV вариант**
Некоторые машины красного цвета. Все компьютеры подключены к Интернету.	Все кошки любят молоко. Некоторые приборы исправны.

Задание 6. Проверьте правильность умозаключений.

I вариант	**II вариант**
a) Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров. b) Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.	a) Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки. b) Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
III вариант	**IV вариант**
a) Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты. b) Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.	a) Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина. b) Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких условиях высказывания $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ истинны?
2. Где используются предикаты и кванторы?
3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

Практическое занятие №6. Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов.

Цель занятия:

– научиться определять основные характеристики графов и решать задачи с их применением.

Для выполнения работы необходимо знать основные понятия теории графов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Графом G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: V – множества вершин и X – множества ребер. Если у ребер не указано направление, то такой граф называется **неориентированным**, у **ориентированного** графа каждое ребро имеет направление.

Мультиграфом называется граф, содержащий кратные ребра.

Псевдографом называется граф, содержащий петли или/и кратные ребра.

Степенью вершины графа deg(V) называется количество ребер ей инцидентных.

<u>Операции над графами:</u>

1. Объединение графов включает все вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
2. Пересечение графов включает только одинаковые вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
3. Кольцевая сумма содержит объединение графов без их пересечения.
4. Дополнение содержит те вершины и ребра, которые не хватает исходному графу до полного графа.

Эйлеровым графом называется граф, содержащий эйлеров цикл (цикл, содержащий все ребра графа только один раз).

Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл (цикл, проходящий через каждую вершину только один раз).

Матрицей инцидентности неориентированного графа (неографа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершинам) и m столбцов (ребер), в которой могут быть следующие значения:

- 1, если вершина инцидента ребру
- 0, если вершина не инцидентна ребру
- 2, если ребро является петлей.

Матрицей инцидентности ориентированного графа (ортграфа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершин) m столбцов (ребрам), в которой могут быть следующие значения:

- -1, если вершина является началом ребра
- 0, если вершина не инцидентна ребру
- 1, если вершина является концом ребра
- ±1, если ребро является петлей.

Матрицей смежности графа называется квадратная матрица с n элементам (по числу вершин), в которой могут быть следующие значения:

- 0, если между вершинами нет ребра

- λ, если между вершинами есть ребро с кратностью λ

Пример 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер X = {(1, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 6), (4, 5)}.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

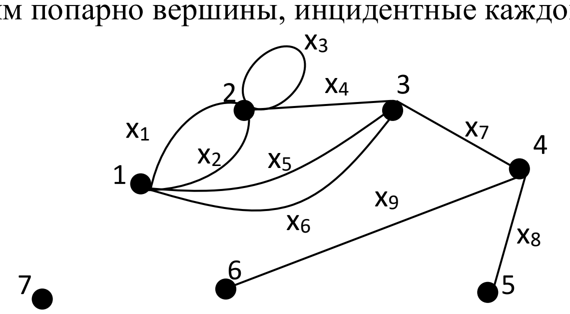
в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

г) Постройте матрицу смежности.

Решение

а) Соединим попарно вершины, инцидентные каждому из заданных ребер



б) Задан неориентированный псевдограф, имеющий две пары кратных ребер: $\{(1, 2)^2, (1, 3)^2\}$

Граф имеет изолированную вершину 7 и петлю в вершине 2.

в) deg(1) = 4, deg(2) = 5, deg(3) = 4, deg(4) = 3, deg(5) = 1, deg(6) = 1, deg(7) = 0

г) матрица инцидентности

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
2	1	1	2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0

г) матрица смежности

	1	2	3	4	5	6	7
1		2	2	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0
3	2	1		1	0	0	0
4	0	0	1		1	1	0
5	0	0	0	1		0	0

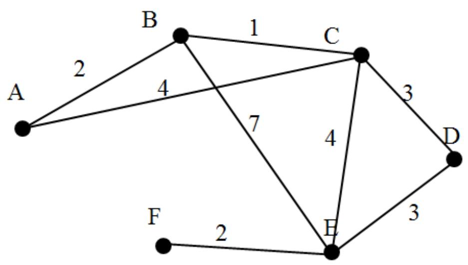
6	0	0	0	1	0		0
7	0	0	0	0	0	0	

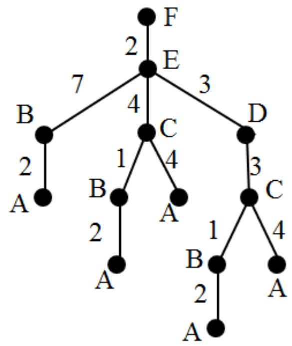
Пример 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

Решение

Изобразим с помощью графа данные таблицы. Точками обозначим населенные пункты. Там, где пункты соединены дорогой, там соединяем точки.





Нарисуем пути из пункта A в F. Начнем с конца, с пункта F.

Получим кратчайший путь AB-BC-CE-EF = 2 + 1 + 4 + 2 = 9

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

Задание 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

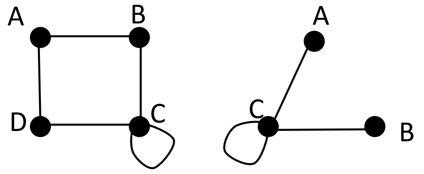
г) Постройте матрицу смежности.

I вариант X = {(2, 3), (4, 3), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

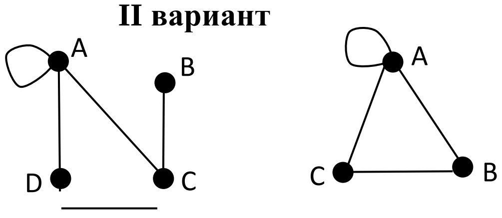
II вариант $X = \{(4, 5), (6, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)\}$

Задание 2. Даны два графа $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$. Изобразите геометрически объединение графов $G_1 \cup G_2$; пересечение графов $G_1 \cap G_2$ и кольцевую сумму $G_1 \oplus G_2$.

I вариант



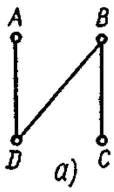
II вариант



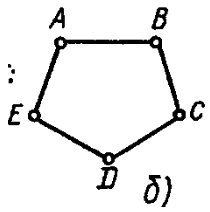
G_1 G_2 G_1 G_2

Задание 3. Изобразите дополнения графов:

I вариант



II вариант :



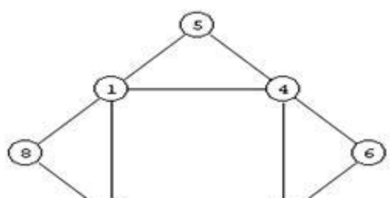
Задание 4. Решить задачу с помощью ориентированного графа:

I вариант. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?

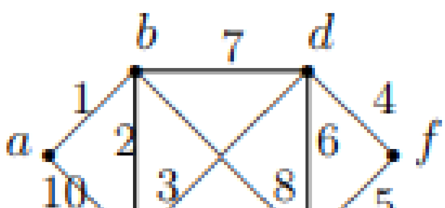
II вариант. Из Череповца в Вологду выехали пятеро велосипедистов: Белов, Чернов, Краснов, Смирнов и Захаров. Чернов едет впереди Смирнова. Захаров едет впереди Белова, но позади Смирнова. Краснов – впереди Чернова. Определите, в каком порядке едут велосипедисты.

Задание 5. Определить является ли граф эйлеровым. Проверить теорему о четности вершин эйлерова графа. Если граф является эйлеровым, то записать эйлеров цикл.

I вариант



II вариант



Задание 6. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

I вариант

	A	B	C	D	E	F
A		2	4	8		16
B	2			3		
C	4			3		
D	8	3	3		5	3
E				5		5
F	16			3	5	

II вариант

	A	B	C	D	E	F
A		4				
B	4		6	3	6	
C		6			4	
D		3			2	
E		6	4	2		5
F					5	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют графом?
2. Охарактеризуйте виды графов.
3. Какими способами можно задать граф?

Практическое занятие №7. Работа машины Тьюринга.
Цель занятия:
– научиться строить машины Тьюринга и применять нормальные алгоритмы Маркова.

Для выполнения работы необходимо знать основы теории алгоритмов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Для уточнения понятия алгоритм его заменили строго формализованными математическими моделями: рекурсивные функции, машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машина Тьюринга состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и управляющей головки, которая перемещается вдоль ленты.

Создать (запрограммировать) МТ означает создать ее **устройство управления** – нарисованную или напечатанную на листе бумаги прямоугольная таблица.

Входные символы / Состояния	S_0	S_1	S_2	S_n
q_1		Команды ТМ		
q_2				
q_n				

Команды ТМ записываются в виде: символ, направление передвижения, состояние.

Пример 1. На ленте есть слово, состоящее из символов #, $, 1 и 0. Составить программу, заменяющую все символы # и $ на нули. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

Решение Рассмотрим пример ленты для описанной машины Тьюринга:

	S_0Hq_0	$1Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$		
	S_0	1	#	$	0	S_0	

q_1 – состояние изменения символа и движения влево; q_1 – состояние остановки.

Получим следующую программу:

	S_0	1	0	#	$
q_1	S_0Hq_0	$1Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$	$0Лq_1$

Пример 2. Построить машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу на ленте. Машина должна прибавить единицу к последней цифре числа. Если последняя цифра равна 9, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

Решение. Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанных в последовательные ячейки на ленте.

Программа для данной машины Тьюринга может выглядеть так:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	S_0
q_1	$1Hq_0$	$2Hq_0$	$3Hq_0$	$4Hq_0$	$5Hq_0$	$6Hq_0$	$7Hq_0$	$8Hq_0$	$9Hq_0$	$0Лq_0$	$1Hq_0$

q_1 — состояние изменения цифры, q_0 — состояние останова.

Пример 3. Алфавит машины Тьюринга состоит из символом a,b,c. Составить программу, которая переносит первый символ непустого слова P в его конец.

Например:

	a	b	c	b		

→

		b	c	b	a	

Решение

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова, используя различные состояния машины.
2. Стереть этот символ.
3. Перегнать автомат вправо под первую пустую клетку за словом, и записать в неё запомненный символ.

Программа будет следующей:

	a	b	c	S_0	
q_1	S_0Пq_2	S_0Пq_3	S_0Пq_4	S_0Нq_0	q_1 – анализ 1 символа, его удаление и разветвление программы
q_2	aПq_2	bПq_2	cПq_2	a Нq_0	q_2 – запись справа a
q_3	aПq_3	bПq_3	cПq_3	b Нq_0	q_3 – запись справа b
q_4	aПq_4	bПq_4	cПq_4	c Нq_0	q_4 – запись справа c

Нормальным алгоритмом Маркова называется непустой конечный упорядоченный набор формул подстановок. **Формулой подстановки** называется запись вида $\alpha\to\beta$, где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

Работа алгоритма Маркова состоит из нескольких шагов:

1. Формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней, выбирается первая применимая формула, далее выполняется подстановка и получается новое слово P_1.
2. Далее полученное слово P_1 берется за исходное и снова формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней и т.д.
3. Работа алгоритма повторяется до тех пор, пока либо не возникнет ситуация, когда ни одна подстановка не подходит - правило остановки; либо не будет установлено, что процесс подстановок не может остановиться.

Пример 4. Дано слово 1 + 2 + 2 + 1 + 4. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1) $2 + 2 \to 4$
2) $5 + 1 \to 6$
3) $1 + 4 \to 5$

Решение

$$1 + \underline{2 + 2} + 1 + 4 \xrightarrow{1} \underline{1 + 4} + 1 + 4 \xrightarrow{3} \underline{5 + 1} + 4 \xrightarrow{2} 6 + 4$$

Т.к. больше не одна подстановка не подходит, то работа алгоритма заканчивается.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

Задание 1. Постройте машину Тьюринга

1. На ленте есть слово, состоящее из символов %, #, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы % на # и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в пятеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против

самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 4, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).

3. Входной алфавит машины Тьюринга: A={a,b}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.
   Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	S_0	a	b	b	a	S_0	→	S_0	b	b	a	S_0	→	S_0	a	b	a	S_0	
		↑							↑						↑				

Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом A={a,b} и схемой:
   1) ba→ab
   2) ab→λ
   Примените этот алгоритм к слову bbaabab.
2. Примените к слову МУХА следующую схему НАМ:
   1) Х→К
   2) М→Р
   3) КА→ЛОН
   4) РУ→С

3. Дано слово 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

   1) 2 + 2 →4
   2) 1 + 1 →2
   3) 4 + 2 →6

II вариант

Задание 1. **Постройте машину Тьюринга**

1. На ленте есть слово, состоящее из символов №, %, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы № на % и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в шестеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 5, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: A={c,d}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.
   Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	S_0	c	d	c	d	S_0	→	S_0	D	C	d	S_0	→	S_0	c	c	d	S_0	
		↑							↑						↑				

Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом A={a,b} и схемой:
   1) ba→ab

2) ab→λ

Примените этот алгоритм к слову aabbaab.

2. Примените к слову КОСА следующую схему НАМ:
   1) К→Р
   2) ЗА→ЛИК
   3) С→З
   4) РО→Б
3. Дано слово 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:
   1) 2 + 2 →4
   2) 1 + 1 →2
   3) 4 + 4 →8

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте тезис Черча.
2. Какова основная цель теории алгоритмов?