Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финуниверситет)

Самарский финансово-экономический колледж
(Самарский филиал Финуниверситета)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по учебно-методической работе
_____________________Л.А Косенкова
« 21 » февраля 20 22 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 09.02.07 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Самара – 202_2_

Методические указания по организации и выполнению практических занятий разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» и в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного приказом Министерства образования науки Российской Федерации от 09.12.2016 года № 1547

Присваиваемая квалификация: администратор баз данных

Разработчики:

Буслаева Е.П. ____________________ Преподаватель Самарского филиала Финуниверситета

Методические указания по организации и выполнению практических занятий рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании предметной (цикловой) комиссии естественно-математических дисциплин

Протокол от «24» января 2022 г. № 5

Председатель ПЦК ____________________ М.В. Писцова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий по предмету ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика разработаны для студентов второго курса специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и преподавателям по организации практических занятий по изучаемой дисциплине, в соответствии с требованиями федерального государственного стандарта среднего профессионального образования.

Практические занятия включают краткое описание теоретического материала, порядок выполнения работы, блок контрольных вопросов, задания. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практического занятия используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая работа оформляется в тетради для практических занятий. В оформление работы входит запись номера практического занятия, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Методические указания направлены на формирование и развитие у студентов общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Целью изучения дисциплины является освоение студентами учебной дисциплины:
обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления теории вероятностей; обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
обеспечение сформированности представлений о теории вероятностей как общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В результате изучения дисциплины обучающийся **должен**
приобрести практический опыт: моделирования вероятностных и статистических задач, выполнение расчета и анализ, графиков, таблиц и графиков в решении профессиональных задач.

уметь:

– применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;

– использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;

– применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

знать:

– элементы комбинаторики;

– понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность;

– алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;

– схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу(теорему) Байеса;

– понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение ихарактеристики;

– законы распределения непрерывных случайных величин;

– центральную предельную теорему, выборочный метод математическойстатистики, характеристики выборки;

– понятие вероятности и частоты.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Объем часов**
Объём образовательной программы учебной дисциплины	46
Объём работы обучающихся во взаимодействии с преподавателем	36
в том числе:	
теоретическое обучение	22
практические занятия	14
самостоятельная работа	10
Промежуточная аттестация в форме комплексного дифференцированного зачёта с ЕН.02	

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики.

Практическое занятие №2. Решение задач с использованием формул полной вероятности и Бейеса.

Практическая занятие №3. Решение задач с использованием формулы Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа.

Практическое занятие №4. Построение закона распределения и функции распределения ДСВ.

Практическое занятие №5. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.

Практическое занятие №6. Построение функции плотности и интегральной функции распределения НСВ. Вычисление основных числовых характеристик НСВ.

Практическое занятие №7. Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки выборки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики.

Цель занятия:

– вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности с использованием формул комбинаторики, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Оснащение:

– раздаточный материал в виде задания и таблиц.

По завершению практического занятия студент должен уметь: вычислять вероятности событий с использованием формул комбинаторики.

1. ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторный анализ (комбинаторика) - раздел математики, который изучает способы составления комбинаций из элементов (объектов, предметов, цифр и т.п.).

1.1. Пусть дано **одно исходное множество**, состоящее из k различных элементов. Выберем из него другое множество, содержащее r элементов, или, как говорят, сделаем выборку объемом r. Сколькими способами это можно сделать? Сколько таких выборок можно составить?

Обозначим через N - число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов. Возможны два варианта составления выборки:

1.1.1. Элементы в выборке могут повторяться (среди элементов выборки могут быть одинаковые);

1.1.2. Элементы в выборке не могут повторяться (состав выборок разный).

Рассмотрим более подробно эти случаи.

1.1.1. Элементы выборки могут повторяться

В этом случае один и тот же элемент исходного множества может входить в выборку до r раз. Выбирая первый элемент, можно выбрать любой из k имеющихся. При выборе второго также можно выбрать k элементов и так далее.

Например, пусть дано множество из трех цифр 1, 2, 3. Сколько можно составить комбинаций из двух цифр? Другими словами, сколько можно составить двухзначных чисел? Таких комбинаций всего будет девять: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Первой мы можем выбрать любую из трех цифр. Второй - также любую из трех цифр. Тогда $N=3\cdot3=3^2=9$.

Теорема 1. Если элементы выборки могут повторяться, то общее число различных выборок равно **числу размещений с повторениями N_k^r** из k элементов по r:

$$N=N_k^r=k^r. \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1.1. Сколько различных комбинаций из трех букв можно составить из 33 букв алфавита?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 33 букв, выборка - из 3 букв. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$$N=N_{33}^3=33^3=35937.$$

ПРИМЕР 1.2. Сколько существует различных семизначных номеров?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 10 цифр, выборка - из 7 цифр. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$N = N_{10}^{7} = 10^7$.

ПРИМЕР 1.3. Игральный кубик бросают два раза. На выпавших гранях две цифры образуют двузначное число. Сколько различных двузначных чисел можно получить?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 6 цифр {1, 2, 3, 4, 5, 6 очков}, выборка - из 2 цифр. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$N = N_{6}^{2} = 6^2 = 36$.

ПРИМЕР 1.4. Монету подбрасывают 10 раз. Сколько существует различных комбинаций выпадения орла и решки?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 2 элементов {орел, решка}, выборка - из 10 элементов. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$N = N_{2}^{10} = 2^{10} = 1024$.

ПРИМЕР 1.5. Батарея из 6 орудий ведет огонь по 10 самолетам. Сколько существует вариантов стрельбы, если предположить, что огонь ведется несогласованно?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 10 самолетов, выборка - из 6 самолетов. Элементы выборки могут повторяться, так как предполагаем, что орудия могут выбрать одинаковые самолеты, поэтому:

$N = N_{10}^{6} = 10^6$.

1.1.2. Элементы выборки не могут повторяться

В этом случае выборки могут отличаться друг от друга либо порядком, в котором выбираются элементы, либо самими элементами (составом элементов).

Например, из трех цифр 1, 2, 3 можно выбрать следующие комбинации из двух элементов: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

В качестве первого элемента подобной выборки можно взять любой из k элементов исходного множества, но при выборе второго - уже $(k–1)$ элементов, третьего - $(k–2)$ элементов,…, r-го - $(k–(r–1))$ элементов. Таким образом, число различных выборок можно определить следующим образом:

$N = k(k–1)(k–2)\ldots(k–(r–1))$. (2)

Такие комбинации называются размещениями без повторений и обозначаются символом A_k^r. Выражение (2) можно упростить, умножив и разделив его на $(k–r)!$. Тогда получим:

$$A_k^r = \frac{k(k-1)(k-2)...(k-r+1)(k-r)!}{(k-r)!} = \frac{k!}{(k-r)!}.$$

Теорема 2. Если элементы выборки повторяться не могут, а сами выборки отличаются либо порядком, либо составом, то общее число различных выборок равно **числу размещений без повторений** $\boldsymbol{A_k^r}$ из k элементов по r:

$$N = A_k^r = \frac{k!}{(k-r)!}. \qquad (3)$$

ПРИМЕР 1.6. Сколько различных комбинаций из трех букв можно составить из букв слова "ромб", если каждую букву можно использовать только один раз?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 4 букв, выборка - из 3 букв. Элементы выборки не могут повторяться, поэтому:

$$N = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

ПРИМЕР 1.7. Сколько можно составить трехзначных чисел из нечетных цифр, если: а) каждую цифру можно использовать только один раз; б) если цифры могут повторяться?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 5 нечетных цифр $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, выборка - из 3 цифр.

а) Если элементы выборки не могут повторяться, то:

$$N = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60.$$

б) Если элементы выборки могут повторяться, то:

$$N = N_5^3 = 5^3 = 125.$$

Рассмотрим **частные случаи размещений**:

Первый случай. Все возможные выборки могут состоять из одних и тех же элементов и отличаться друг от друга только порядком размещения элементов, то есть $r=k$. Тогда общее число выборок можно определить следующим образом:

$$N = A_k^k = \frac{k!}{(k-k)!} = \frac{k!}{0!} = \frac{k!}{1} = k!.$$

Такие комбинации называются перестановками и обозначаются символом P_k .

Теорема 3. Если выборки состоят из одних и тех же элементов и отличаются друг от друга только порядком, то общее число различных выборок равно **числу перестановок** из k элементов:

$$N = P_k = k! \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1.8. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, если: а) каждую цифру можно использовать только один раз; б) если цифры могут повторяться?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 3 цифр, выборка - также из 3 цифр.

а) Если элементы выборки не могут повторяться, то:

$$N = P_3 = 3! = 6.$$

б) Если цифры могут повторяться, то:

$$N = N_3^3 = 3^3 = 27.$$

ПРИМЕР 1.9. Сколькими способами можно расставить на полке 10 книг?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество и выборка состоят из 10 книг. Тогда:

$$N = P_{10} = 10! = 3628800.$$

ПРИМЕР 1.10. Сколькими способами можно рассадить четырех человек в четырехместной каюте?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество и выборка состоят из 4 элементов. Тогда:

$N = P_4 = 4! = 24.$

Второй случай. Рассмотрим выборки, в которых порядок размещения элементов не имеет значения, а сами выборки отличаются друг от друга только составом. Тогда общее число выборок можно определить следующим образом:

$$N = \frac{A_k^r}{P_r} = \frac{k!}{r!(k-r)!}.$$

Такие комбинации называются сочетаниями и обозначаются символом C_k^r.

Теорема 4. Если элементы выборки не повторяются, порядок размещения элементов в выборке не имеет значения, а выборки отличаются только составом, то общее число различных выборок равно **числу сочетаний** из k элементов по r:

$$N = C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}. \qquad (5)$$

Надо уметь отличать сочетания от размещений. Например, пусть в группе 25 студентов. Пять человек вышли из аудитории на перерыв. Сколько всех возможных групп из 5студентов, выбранных из 25 человек, можно составить?

Если 5 человек стоят в коридоре и беседуют, то совершенно неважно в каком порядке они стоят. Число всех возможных групп из 5 человек, выбранных из 25 человек, равно числу сочетаний из 25 по 5:

$$N = C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = 53130.$$

Если же студенты отправились в перерыве в буфет, то тогда важно, в каком порядке они стоят в очереди. Число всех возможных групп из 5 человек, выбранных из 25 человек, с учетом их размещения в очереди равно числу размещений из 25 по 5:

$$N = A_{25}^5 = \frac{25!}{(25-5)!} = 6375600.$$

Свойства сочетаний:

1) $C_k^0 = C_k^k = 1;$

2) $C_k^1 = k;$

3) $C_k^r = C_k^{k-r} \qquad (r > k/2);$

4) $C_{k+1}^{r+1} = C_k^r + C_k^{r+1} \qquad (0 \le r \le k).$

ПРИМЕР 1.11. Сколькими способами можно выбрать три шара из пяти?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 5 шаров, выборка - из 3 шаров. Порядок, в котором мы выбираем шары, значения не имеет, поэтому:

$$N= C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

ПРИМЕР 1.12. Тринадцать студентов обменялись рукопожатиями. Сколько всего сделано рукопожатий?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 13 студентов, выборка - из 2 человек, поэтому:

$$N= C_{13}^2 = \frac{13!}{2!(13-2)!} = 78.$$

1.2. Пусть даны **два исходных множества**, состоящих из k_1 и k_2 различных элементов. Необходимо определить число различных выборок N, составленных из элементов двух исходных множеств. В этом случае сначала делают выборку из одного множества и определяют N_1 - число различных выборок, составленных из элементов первого исходного множества. Затем делают выборку из другого множества и определяют N_2. Тогда общее число выборок:

$$N=N_1 \cdot N_2, \tag{6}$$

где N_1 и N_2 определяют по формулам (1), (3)-(5) в зависимости от конкретного смысла задачи.

ПРИМЕР 1.13. Из десяти красных роз и 8 белых роз нужно составить букет, содержащий две красных и три белых розы. Сколько можно составить таких букетов?

РЕШЕНИЕ. Одно исходное множество состоит из 10 красных роз, выборка - из 2 роз. Порядок, в котором мы выбираем розы, значения не имеет, поэтому:

$$N_1= C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 45.$$

Другое исходное множество состоит из 8 белых роз, выборка - из 3 роз, поэтому:

$$N_2= C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56.$$

Тогда общее количество букетов $N=N_1 \cdot N_2=45 \cdot 56=2520$.

ПРИМЕР 1.14. В урне лежат 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

РЕШЕНИЕ. Одно исходное множество состоит из 10 белых шаров, выборка - из 4 белых шаров. Порядок, в котором мы выбираем шары, значения не имеет, поэтому:

$$N_1= C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!} = 210.$$

Другое исходное множество состоит из 5 черных шаров, выборка - из 3 шаров, поэтому:

$N_2=C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2}=10.$

Тогда общее количество способов $N=N_1\cdot N_2=210\cdot 10=2100$.

ПРИМЕР 1.15. Сколькими способами можно расставить на полке девять различных книг, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

РЕШЕНИЕ. Будем считать определенные 4 книги за одну. Тогда первое исходное множество состоит из 6 книг, выборка - также из 6 книг, т.е. исходное множество и выборка состоят из одних и тех же элементов. Эти шесть книг можно расставить на полке в разном порядке, поэтому:

$N_1=P_6=6!=720.$

Другое исходное множество состоит из четырех определенных книг, выборка - из тех же книг, которые можно по-разному переставить между собой, поэтому:

$N_2=P_4=4!=24.$

Тогда общее количество способов расстановки книг $N=N_1\cdot N_2=720\cdot 24=17280$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Вероятность события A равна отношению числа исходов испытания m, в которых может появиться событие A, к общему числу n всех элементарных исходов испытания, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

ПРИМЕР 2.1. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Какова вероятность получить слова: а) "тор"; б) "теория"?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - получение слова "тор". Элементарным исходом испытания является извлечение трех карточек из шести. Общее число всех исходов испытания равно числу размещений из 6 по 3, так как различные выборки могут отличаться как составом, так и порядком:

$n=A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!}=120.$

Слово "тор" можно получить только одним способом m=1. Тогда:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{120}.$$

б) Пусть событие B - получение слова "теория". Элементарным исходом испытания является получение различных комбинаций из шести букв. Общее число всех исходов испытания равно числу перестановок из 6, так как различные выборки могут отличаться друг от друга только порядком:

$n=P_6=6!=720.$

Слово "теория" можно получить только одним способом m=1. Тогда:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}.$$

ПРИМЕР 2.2. Буква «а» написана на трех карточках, буква «н» - на двух карточках, буква «с» - на одной карточке. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Какова вероятность получить слово "ананас"?

РЕШЕНИЕ. Пусть событие A - получение слова "ананас". Как и в предыдущем случае, элементарным исходом испытания является получение различных комбинаций из шести букв. Общее число всех исходов испытания равно числу перестановок из 6, так как различные выборки могут отличаться друг от друга только порядком:

$n=P_6=6!=720.$

Слово "ананас" можно получить не одним способом, так как перестановка трех букв «а» и двух букв «н» не меняет это слово. Три карточки с буквой «а» можно расставить 6 способами:

$m_1=P_3=3!=6.$

Две карточки с буквой «н» можно расставить 2 способами:

$m_2=P_2=2!=2.$

Карточку с буквой «с» можно расставить одним способом. Тогда: $m=m_1m_2m_3=6\cdot2\cdot1=12$. Следовательно:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{720}=\frac{1}{60}.$$

ПРИМЕР 2.3. В урне находится 15 шаров, из них 9 красных и 6 синих. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара: а) оба красные; б) 1 красный, 1 синий?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - извлечены два красных шара. Общее число всех исходов испытания равно числу способов, какими можно выбрать 2 шара из 15. Различные выборки могут отличаться друг от друга только составом (порядок не имеет значения), поэтому:

$$n=C_{15}^2=\frac{15!}{2!(15-2)!}=\frac{13!\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot13!}=105.$$

Число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу сочетаний из 9 красных шаров по 2:

$$m=C_9^2=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{7!\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot7!}=36.$$

Следовательно:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{36}{105}=\frac{12}{35}.$$

б) Пусть событие B - извлечены один красный и один синий шар. Общее число всех исходов испытания, как и в предыдущем случае, равно n=105. Для того чтобы подсчитать число случаев, благоприятствующих событию B, необходимо выбрать 1 шар из 9 красных (одно исходное множество) и 1 шар из 6 синих (другое исходное множество). Тогда:

$m = m_1 \cdot m_2 = C_9^1 C_6^1 = 9 \cdot 6 = 54.$

Следовательно:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{54}{105} = \frac{18}{35}.$$

ПРИМЕР 2.4. В партии 50 деталей, из них 5 - бракованные. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки шести деталей две окажутся бракованными?

РЕШЕНИЕ. Пусть событие A - выбраны 2 бракованные детали и 4 небракованные. Общее число всех исходов испытания равно числу способов, какими можно выбрать 6 деталей из 50. Различные выборки могут отличаться друг от друга только составом (порядок не имеет значения), поэтому:

$$n = C_{50}^6 = \frac{50!}{6!(50-6)!} = \frac{44! \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 44!} = 15890700.$$

Для того чтобы подсчитать число случаев, благоприятствующих событию A, необходимо выбрать 2 детали из 5 бракованных (одно исходное множество) и 4 детали из 45 небракованных (другое исходное множество). Тогда:

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_5^2 C_{45}^4 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{45!}{4!(45-4)!} = 1489950.$$

Следовательно:

$$P(B) = \frac{m}{n} = 0{,}09.$$

ПРИМЕР 2.5. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже с первого по девятый. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на шестом этаже; б) на одном этаже?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - все пассажиры выйдут на шестом этаже. Каждый пассажир может выйти на восьми этажах (со второго по девятый этаж), то есть исходное множество состоит из 8 этажей. Выборка равна 4 этажам. Тогда общее число всех исходов испытания равно числу размещений с повторениями, так как элементы выборки могут повторяться (например, все четыре человека могут выйти на одном и том же этаже). Поэтому:

$$n = N_8^4 = 8^4 = 4096.$$

Число случаев, благоприятствующих событию A, равно $m=1$.

Следовательно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4096} = 0{,}00024.$$

б) Пусть событие B - все пассажиры выйдут на одном этаже. Теперь событию В будут благоприятствовать $m=8$ случаев (все пассажиры выйдут или на втором этаже, или на третьем, …, или на девятом этаже). Следовательно:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{8}{4096}=0{,}00195.$$

ПРИМЕР 2.6. В партии 100 изделий, из них 4 - бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные детали достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - все бракованные изделия достанутся одному потребителю. Общее число всех исходов испытания равно числу способов выбрать 50 изделий из 100, то есть:

$$n=C_{50}^{6}=\frac{100!}{50!(100-50)!}=\frac{100!}{50!\cdot 50!}.$$

Событию A благоприятствуют случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будет либо 46 стандартных из 96 и все 4 бракованных изделия, либо 50 стандартных из 96:

$$m=m_1\cdot m_2+m_3\cdot m_4=C_{96}^{46}C_4^4+C_{96}^{50}C_4^0=2C_{96}^{46}=\frac{96!}{46!\cdot 50!}.$$

.

Следовательно:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{96!\cdot 50!\cdot 50!}{46!\cdot 50!\cdot 100!}=\frac{2\cdot 96!\cdot 46!\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{46!\cdot 96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}117.$$

б) Пусть событие B - в каждой партии по 2 бракованных изделия. Теперь событию В будут благоприятствовать случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будут 48 стандартных из 96 и 2 бракованных из 4, то есть:

$$m=m_1\cdot m_2=C_{96}^{48}C_4^2=\frac{96!}{48!\cdot 48!}.$$

Следовательно:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{96!\cdot 4!\cdot 50!\cdot 50!}{48!\cdot 48!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 100!}=\frac{96!\cdot 2!\cdot 3\cdot 4\cdot (48!\cdot 49\cdot 50)^2}{(48!)^2\cdot 2!\cdot 96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}383.$$

Задания

Вариант 1

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?

4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.

5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

Вариант 2

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.

2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.

3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?

4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.

5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

Оформление отчета

1. Решение заданий записать в тетрадь для практических занятий.

Контрольные вопросы

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?
8. Что называется относительной частотой события?

Практическое занятие №2. Решение задач с использованием формул полной вероятности и Бейеса.
Цель занятия:

– проверить умения выполнять арифметические действия над комплексными числами, записывать комплексные числа в различных формах.

Оснащение:

- раздаточный материал в виде задания и таблиц.

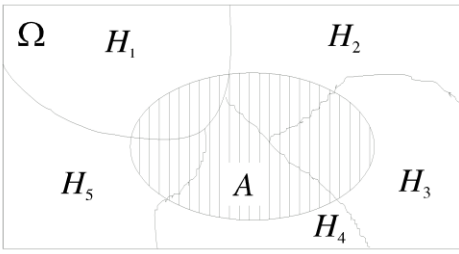
По завершению практического занятия студент должен уметь: выполнять арифметические действия над комплексными числами, записывать комплексные числа в различных формах.

Формула полной вероятности.

Пусть имеется группа событий $H_1, H_2,..., H_n$, обладающая следующими свойствами:

1) все события попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j=1,2,...,n$; $i \neq j$;

2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:



$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$.

Рис.8

В этом случае будем говорить, что $H_1, H_2,...,H_n$ образуют **полную группу событий**. Такие события иногда называют **гипотезами**.

Пусть A – некоторое событие: $A \subset \Omega$ (диаграмма Венна представлена на рисунке 8). Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

$$P(A) = P(A/ H_1)P(H_1) + P(A/ H_2)P(H_2) + ...+ P(A/ H_n)P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$$

Доказательство. Очевидно: A = , причем все события (i = 1,2,...,n) попарно несовместны. Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) +...+ P(A \cap H_n$$

Если учесть, что по теореме умножения $P() = P(A/H_i)P(H_i)$ (i = 1,2,...,n), то из последней формулы легко получить приведенную выше формулу полной вероятности.

Пример. В магазине продаются электролампы производства трех заводов, причем доля первого завода - 30%, второго - 50%, третьего - 20%. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампа оказалась бракованной.

Пусть событие H_1 состоит в том, что выбранная лампа произведена на первом заводе, H_2 на втором, H_3 - на третьем заводе. Очевидно:

$P(H_1) = 3/10$, $P(H_2) = 5/10$, $P(H_3) = 2/10$.

Пусть событие A состоит в том, что выбранная лампа оказалась бракованной; A/H_i означает событие, состоящее в том, что выбрана бракованная лампа из ламп, произведенных на i-ом заводе. Из условия задачи следует:

$P\ (A/H_1) = 5/10$; $P(A/H_2) = 3/10$; $P(A/H_3) = 2/10$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{100} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{100} = \frac{17}{500}$$

2. Формула Байеса(Бейеса)

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная группа событий и $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Тогда по формуле для условной вероятности

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \quad (1)$$

Здесь $P(H_k/A)$ – условная вероятность события (гипотезы) H_k или вероятность того, что H_k реализуется при условии, что событие A произошло.

По теореме умножения вероятностей числитель формулы (1) можно представить в виде

$$P\left(H_k \cap A\right) = P\left(A \cap H_k\right) = P(A/H_k)\,P(H_k)$$

Для представления знаменателя формулы (1) можно использовать формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$$

Теперь из (1) можно получить формулу, называемую **формулой Байеса**:

$$P(H_k / A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum P(A/H_i)}$$

По формуле Байеса исчисляется вероятность реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло. Формулу Байеса еще называют **формулой вероятности гипотез.** Вероятность $P(H_k)$ называют априорной вероятностью гипотезы H_k, а вероятность $P(H_k/A)$ – апостериорной вероятностью.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

Пример. Рассмотрим приведенную выше задачу об электролампах, только изменим вопрос задачи. Пусть покупатель купил электролампу в этом магазине, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта лампа изготовлена на втором заводе. Величина $P(H_2) = 0,5$ в данном случае это априорная вероятность события, состоящего в том, что купленная лампа изготовлена на втором заводе. Получив информацию о том, что купленная лампа бракованная, мы можем поправить нашу оценку возможности изготовления этой лампы на втором заводе, вычислив апостериорную вероятность этого события.

Выпишем формулу Байеса для этого случая

$$P(H_2 / A) = P(A/H_2)P(H_2)/P(A)$$

Из этой формулы получаем: $P(H_2/A) = 15/34$. Как видно, полученная информация привела к тому, что вероятность интересующего нас события оказывается ниже априорной вероятности.

3. Задачи с решениями.

Задача 1. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через *B* событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$P(A_1) = 0,2 \quad P(B|A_1) = 0,1$

$P(A_2) = 0,3 \quad P(B|A_2) = 0,05$

$P(A_3) = 0,5 \quad P(B|A_3) = 0,2$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$$

Задача 2. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие В - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$P(B \mid A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$

$P(B \mid A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$

$P(B \mid A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A \mid B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Задача 3. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, $k = 1, 2, 3$.

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$$P(A|H_1) = 0,02,\ P(A|H_2) = 0,07,\ P(A|H_3) = 0,1.$$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$$P(H_1) = 3P(H_2),\ P(H_3) = 0,5P(H_2).$$

А так как гипотезы образуют полную группу, то $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Решив полученную систему уравнений, найдем: $P(H_1) = 6/9,\ P(H_2) = 2/9,\ P(H_3) = 1/9$.

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A) = \sum P(A|H_i)P(H_i) = \frac{6}{9}0,02 + \frac{2}{9}0,07 + \frac{1}{9}0,1 = 0,04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{6/9 \cdot 0,02}{0,04} = 0,33,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{2/9 \cdot 0,07}{0,04} = 0,39,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1/9 \cdot 0,1}{0,04} = 0,28.$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

Задача 4.

В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.

а) Какова вероятность того, что этот шар белый?

б) Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Решение.

Введем обозначения:

А – шар, извлеченный из второй урны, белый;

гипотезы H_1 – из первой урны во вторую переложены 2 белых шара,

H_2 – переложены 2 разноцветных шара,

H_3 – переложены 2 черных шара.

Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3).$$

Вероятности гипотез H_i и условие вероятности $P(A|H_i),\ (i = 1, 2, 3)$ вычисляем по классической схеме:

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28},\ P(H_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28},\ P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28};$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{4},\ P(A|H_2) = \frac{5}{8},\ P(A|H_3) = \frac{1}{2}.$$

Полученные результаты подставим в **формулу полной вероятности:**

$$P(A) = \frac{9}{16}$$

б) Вероятность $P(H_1|A)$ находим по **формуле Байеса**:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{1}{21}.$$

Задания

Задача 1.

В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.

а) Какова вероятность того, что этот шар белый?

б) Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Задача 2

В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

Задача 3

Сообщение со спутника на землю передаётся в виде бинарного кода, то есть как упорядоченного набора нулей и единиц. Предположим, что послание на 70% состоит из нулей. Помехи приводят к тому, что только 80% нулей и единиц правильно распознаются приёмником. Если принят сигнал "1”, то какова вероятность того, что отправлен сигнал "0”?

Задача 4

Для проверки усвоения лекционного материала в студенческой группе был случайным образом выбран студент, и ему был предложен тест по теме лекции. В этой студенческой группе 6 отличников, 7 хороших студентов и три средних студента (по результатам прошедшей сессии). Было известно, что отличник справляется с тестом с вероятностью 0,85, хороший студент справляется с тестом с вероятностью 0,6, а средний студент справляется с тестом с вероятностью 0,3.

а) вычислить априорную вероятность того, что был протестирован хороший студент;

в) вычислить вероятность того, что студент не справился с тестом;

с) вычислить вероятность того, что был выбран хороший студент, если известно, что студент с тестом не справился.

Задача 5

В упаковке находилось 7 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта, внешне неразличимых. При транспортировке два изделия были похищены. После этого из упаковки было извлечено наудачу изделие и подвергнуто проверке на качество.

а) вычислить вероятность того, что были похищены изделия второго сорта;

в) вычислить вероятность того, что среди похищенных изделий одно было первого сорта, другое второго сорта;

с) вычислить вероятность того, подвергнутое проверке изделие было второго сорта;

d) вычислить вероятность того, что похищенные изделия были второсортными

Оформление отчета

1. Решение заданий записать в тетрадь для практических занятий.

Контрольные вопросы

1. Формула полной вероятности.
2. Формула Бейеса.

Практическое занятие №3. Решение задач с использованием формулы Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа.
Цель занятия:
– проверить умения решать задачи с использованием формулы Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.
Оснащение:
– раздаточный материал в виде задания и таблиц.
По завершению практического занятия студент должен уметь: решать задачи с использованием формулы Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа.

Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых однотипных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью Р. Тогда вероятность непоявления события А, т.е. $P(\overline{A})$ равна q=1-p.

Вероятность того, что событие А произойдет в этих пнезависимых испытаниях ровно k раз, можно вычислить по **<u>формуле Бернулли</u>**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Для определения вероятности появления события А менее m раз (k < m), более m раз (k > m), хотя бы один раз ($k \geq 1$) и т. п. могут быть использованы формулы:

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1),$$

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n),$$

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

<u>Пример</u>: Прибор состоит из пяти узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t откажут ровно два узла.

<u>Решение:</u> Рассмотрим событие А - выход узла из строя за время t. Число узлов n=5. Число отказавших узлов за время t: k=2.

P(A) - вероятность выхода узла из строя: p=P(A)=0,1. Тогда q=1-p=1-0,1=0,9.

Теперь вычислим искомую вероятность по формуле Бернулли:

$P_5(2) = C_5^2 (0,1)^2 \cdot (0,9)^3 = 10 \cdot 0,01 \cdot 0,729 = 0,0729.$

<u>Пример</u> . Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

<u>Решение</u>

а) Искомую вероятность находим с помощью формулы Бернулли (14), учитывая что $n = 4$, $k = 3$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$.

$P_4(3) = C_4^3 (0,9)^3 (0,1)^1 = 4 \cdot 0,729 \cdot 0,1 = 0,2916.$

б) «Не менее трех» означает, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения искомая вероятность равна

$P_4(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 (0,9)^3 (0,1)^1 + C_4^4 (0,9)^4 (0,1)^0 = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Теорема Пуассона*. (*Отметим, что на практике эта теорема применяется при $\lambda_n < 10$. Это означает, что p должно быть очень малым числом*). Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью p успеха в одном испытании и q- вероятностью неудачи. Тогда для любого фиксированного m справедливо соотношение*

$$P_n^m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np,$$

<u>Пример.</u>Машинистка печатает текст, который содержит *20000* знаков. Каждый знак может быть напечатан неправильно с вероятностью *0.0004*. Какова вероятность того, что в тексте не менее *3* опечаток?

<u>Решение.</u> Если опечатку считать успехом, то к этой задаче применима схема Бернулли при *p=0.0004, n=20000*. Поскольку $\lambda = np = 8$, то можно использовать предельную теорему Пуассона. Поэтому, искомая вероятность равна $1 - P_n^0 - P_n^1 - P_n^2 = 1 - e^{-8} - 8e^{-8} - (64/2)e^{-8} = 1 - 41e^{-8} = 0.986$.

<u>Пример.</u>Монета бросается 100 раз. Найти приближенно вероятность того, что герб выпадет 40 раз. (Воспользоваться таблицей)

<u>Решение.</u>Если считать успехом выпадение герба, то вероятность успеха равна *1/2*. Поэтому используя предельную локальную теорему Муавра-Лапласа, получим

$$P(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}=\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}, \text{ где } x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{40-100/2}{\sqrt{100/4}}=-2.$$

Таким образом, используя таблицы для плотности нормального распределения, получим P(A)=0.0108.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. *Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью успеха p,* $0<p<1$*, в одном испытании и* $q=1-p$ *- вероятностью неудачи. Величина p не зависит от n. Тогда .для любых вещественных чисел a<b при* $n\to\infty$

$$P(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$ - функция Лапласа, значения которой заданы в таблицах, приведенных в большинстве задачников по вероятности и математической статистике.

Пример. При рождении ребенка вероятность рождения мальчика равна *0.512*. Найти вероятность того, что среди *1000* новорожденных мальчиков родится больше, чем девочек.

Решение. Пусть *A* – это событие, соответствующее вопросу задачи, *m* – это число рожденных мальчиков. Нетрудно видеть, что *P(A) = P(m>500).* Поскольку *n=1000* можно считать достаточно большим, то применим интегральную теорему Муавра-Лапласа, согласно которой

$$P(A)=P((\frac{m-np}{\sqrt{npq}}>\frac{500-512}{\sqrt{250}})=1-\Phi(-0.757)=1-(1-\Phi(0.757)=\Phi(0.757)=0.775.$$

1. **Закрепление знаний.**

Пример. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение: СобытиеА – достали белый шар. Тогда вероятности $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\bar{A})=\frac{1}{3}$.

По формуле Бернулли требуемая вероятность $P_4(2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$.

Пример. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 деталей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение: Вероятность рождения девочки $p=\frac{1}{2}$, тогда $q=\frac{1}{2}$.

Найдем вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$P_5(0)=q^5=\frac{1}{32}$, $P_5(1)=C_5^1 p^1 q^4=\frac{5}{32}$,

$P_5(2)=C_5^2 p^2 q^3=\frac{10}{32}$, $P_5(3)=C_5^3 p^3 q^2=\frac{10}{32}$.

Следовательно, искомая вероятность $P=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)=\frac{13}{16}$.

Пример.Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена 70 раз.

Решение: Из условия следует, что $n=100$, $p=0{,}8$, поэтому $q=0{,}2$; $k=70$. Поскольку $npq=16>10$, то можно воспользоваться формулой.

$x=\frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{16}}=-2{,}5$.

По таблице приложения 1 находим $\varphi(-2{,}5)=\varphi(2{,}5)=0{,}0175$. Поэтому $P_{100}(70)\approx\frac{0{,}0175}{4}=0{,}0044$.

Пример. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена от 75 до 90 раз.

Решение: Используем интегральную теорему Лапласа. В нашем случае $n=100$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$, $k_1=75$, $k_2=90$.

$x_1=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{16}}=-1{,}25$, $x_2=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{16}}=2{,}5$.

По таблице приложения 1 находим

$\Phi(x_1)=\Phi(-1{,}25)=-\Phi(1{,}25)=-0{,}3944$, $\Phi(x_2)=\Phi(2{,}5)=0{,}4938$.

Поэтому $P_{100}(75;90)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882$.

Пример.Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времениT равна 0,002. Найти вероятность того, что за времяT откажут ровно три элемента.

Решение: N=1000, p=0,002, λ=np=2, k=3.

Искомая вероятность $P_{1000}(3)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}=\frac{2^3}{2e^2}=0{,}18$.

Пример. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

Решение n=500, p=0,004, λ=2.

По теореме сложения вероятностей

$$P=P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-2}+\frac{2}{1!}e^{-2}+\frac{4}{2!}e^{-2}=5e^{-2}=0{,}68.$$

Пример. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Решение λ=np=1000·0,003=3

$$P_{1000}(k>2)=1-P_{1000}(k\le 2)=1-\left(P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)\right)=$$
$$=1-\left(e^{-3}+3e^{-3}+4{,}5e^{-3}\right)=0{,}5678.$$

Задания

Вариант 1.

1. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.

2. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

3. В каждом из 500 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 220 раз; меньше чем 240 и больше чем 180 раз.

4. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены все моторы.

5. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Вариант 2.

1. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в пяти испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.

2. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

3. В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 270 раз; меньше чем 270 и больше чем 230 раз.

4. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,4.

5. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 100 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,6.

Оформление отчета

1. Решение заданий записать в тетрадь для практических занятий.

Контрольные вопросы

1. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
2. Как записывается формула Бернулли?
3. Вероятности каких событий можно вычислять по локальной теореме Лапласа?
4. Вероятности каких событий можно вычислять по интегральной теореме Лапласа?
5. Как записывается формула локальной теоремы Лапласа?
6. Как записывается формула интегральной теоремы Лапласа?

Практическое занятие № 4. Построение закона распределения и функции распределения ДСВ.

Цель занятия:

– проверить умения построения закона распределения и функции распределения ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Оснащение:

– раздаточный материал в виде задания и таблиц.

По завершению практического занятия студент должен уметь: строить закон распределения и функцию распределения ДСВ.

Вариант 1

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения и функцию распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,3. Составить закон распределения и функцию распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

5. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

Вариант 2

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

2. В денежной лотерее выпущено 500 билетов. Разыгрывается два выигрыша по1000 рублей, десять выигрышей по 100 рублей и двадцать – по 50 рублей. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения и функцию распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3.

5. Банк выдает пять кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Оформление отчета

1. Решение заданий записать в тетрадь для практических занятий.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Дайте определение многоугольника распределения дискретной случайной величины.
5. Формула биномиального распределения.

Практическое занятие №5. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.
Цель занятия:

– проверить умения вычислять основные числовые характеристики ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Оснащение:

– раздаточный материал в виде задания и таблиц.

По завершению практического занятия студент должен уметь: вычислять основные числовые характеристики ДСВ.

Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. Закон распределения ДСВ:

Случайная величина. ***Случайной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Например, число бракованных лампочек среди 10 купленных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2,….,10. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Zи так далее, а их значения – соответствующими строчными буквами x, y, z и так далее.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Случайная величина называется ***дискретной,*** если множество её значений конечно или счетно, то есть множество её значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2, .. x_n, \ldots$

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного множества. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Например, если в качестве случайной величины рассматривать оценку студента на экзамене, то с определенной вероятностью, которая зависит от многих факторов, студент может получить или 2, или 3, или 4, или 5, но в результате сданного одним студентом экзамена в ведомости всегда стоит только одна оценка.

Случайная величина может быть задана *законом распределения*.

Законом распределения дискретной случайной величины (сокращенно ДСВ) называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины таблица состоит из двух строк и называется законом или рядом распределения дискретной случайной величины X. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая - соответствующие им вероятности.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n+1}	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n+1}	p_n

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ записываются в таблице, как правило, в порядке возрастания. Приняв во внимание, что в каждом отдельном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение случайной величины X, заключаем, что события $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ несовместны и образуют полную группу событий. Следовательно, сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n=} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Пример.

В издательстве выпущено 100 книг по овцеводству. Лотереей разыграны одна книга в 500 руб. и 10 по 10 руб. Найти закон распределения случайной величины x - возможного выигрыша одной книги.

Решение:

Возможны значениях: $X_1 = 500,\ x_2 = 10,\ x_3 = 0$. Вероятности: $p_1=0{,}01;\ p_2=0{,}1;\ p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}89$.

Закон распределения:

X	500	10	0
P	0,01	0,1	0,89

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины:

Функцией распределения случайной величины называют функцию *F(x),* определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение, меньшее *x,* то есть $F(x) = P(X<x)$.

Кроме закона распределения, который дает полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины.*** К ним относятся *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины*.

Математическим ожиданием (М) дискретной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений, умноженных на их вероятности.

$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{I=1}^{\infty} x_I y_I,$

где x_i, - значение случайной величины, p_i- вероятность случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает *свойствами,* которые вытекают из его определения.

1. Математическое ожидание постоянной величины С есть постоянная величина

$$M(\text{С}) = \text{С}, \text{где С} = const.$$

2. Математическое ожидание дискретной случайной величины X, умноженной на постоянную величину С, равно произведению математического ожидания M(X) на С. То есть постоянный множитель можно выносить за знак суммирования

$$M(CX) = CM(X)$$

3. Математическое ожидание суммы дискретных случайных величин X и У равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X+У) = M(X) + M(У)$$

4. Математическое ожидание произведения независимых дискретных случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий

$$M(X * \text{У}) = M(X) * \text{M}(Y), \text{если } X \text{ и } Y \text{ независимы}$$

Часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг его среднего значения. ***Дисперсией (рассеянием)*** *D(x)* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = \text{M}[X-M(X)]^2$.

Формула для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2)-[M(X)]^2$.

Средним квадратичным отклонением *(σ (x))* случайной величины x называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Исследование вариационных статистических рядов рассмотрим на примере.
Пример: Дан дискретный вариационный ряд

X	1	4	6
N	10	15	25

где $X\ \{x_1 x_2,\ x_3\}$ характеристики случайной величины X,$N\ \{n_1,\ n_2\ ,n_3\}$ - частоты появления элементов в выборке.
Провести исследование дискретного вариационного ряда
1) найти объём выборки;
2) составить закон распределения случайной величины X;
3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.
Решение:
1) Найдём объем выборки: $n= n_1+n_2+n_3=10+15+25=50.$
2)Найдём относительные частоты: $W_1=10/50=1/5,\ w_2=15/50=3/10,\ w_3=25/50y\ =1/2.$
Закон распределения случайной величины X представлен таблицей:

X	1	4	б
W	1/5	3/10	1/2

3) Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение:
$M=w_1x_1\ +\ w_2x_2\ +\ w_3x_3=l/5\ \bullet\ 1+3/10\ \cdot 4+1/2\cdot 6=4/4;$
$D=\ w_1\ (x_1\text{-}M)^2\ +\ w_2\ (x_2\ \text{-}M)^2+\ w_3\ (x_3\ \text{-}M)^2=\ 1/5\cdot(1\text{-}4{,}4)\ +3/10\cdot(4\text{-}\ 4{,}4)\ +1/2\cdot(6\text{-}\ 4{,}4)=3{,}64;\sigma(x)$
$=\ \sqrt{D(X)}=\sqrt{3{,}64}\ =1{,}9$

Необходимые принадлежности

1. Раздаточный материал в виде задания и таблиц.

Задания

Вариант 1.

1. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными p_1=0,7; p_2=0,8 и p_3=0,6.Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1меньше x_2. Найти x_1 и x_2, зная, что M(X)=2,7 и D(X)=0,21.

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: x_1=6 с вероятностью p_1=0,5, x_2=4 с вероятностью p_2=0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

Вариант 2.

1. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью p_1 и $x_2 = 6$ с вероятностью p_2. Найти p_1 и p_2, зная, что M(X)=10,8 и D(X)=0,84.

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=8$ с вероятностью $p_1=0{,}2$, $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0{,}4$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=20.

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

Оформление отчета

1. Решение заданий записать в тетрадь для практических занятий.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического ожидания случайной величины.

2. Что называется дисперсией случайной величины?

3. Запишите формулу вычисления математического ожидания случайной величины.

4. Запишите формулу вычисления дисперсии случайной величины.

5. Свойства математического ожидания случайной величины.

6. Свойства дисперсии случайной величины.

7. Дайте определение среднего квадратического отклонения.

8. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения.

9. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

10. Определение биномиального закона распределения.

11. Формула биноминального закона распределения дискретной случайной величины.

Практическое занятие №6. Построение функции плотности и интегральной функции распределения НСВ. Вычисление основных числовых характеристик НСВ.

Цель занятия:

– проверить умения вычислять основные числовые характеристики НСВ, строить функцию плотности и интегральную функцию распределения НСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Оснащение:

– раздаточный материал в виде задания и таблиц.

По завершению практического занятия студент должен уметь: вычислять основные числовые характеристики НСВ, строить функцию плотности и интегральную функцию распределения НСВ.

Теоретическое обоснование

Непрерывной называют **случайную величину**, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения (или интегральной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция F(x), равная вероятности того, что X приняла значение меньше X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Плотностью распределения (или дифференциальной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция f(x), равная производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

В частности, вероятность попадания случайной величины в интервал (a ; b) равна:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Математическое ожидание M(X) и **дисперсия D(X)** непрерывной случайной величины определяются через несобственные интегралы:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(x)\right]^2 f(x)dx.$$

Все свойства дисперсии и математического ожидания, установленные для ДСВ, сохраняются для НСВ.

Замечание: Если распределение симметрично, то его мода, медиана и математическое ожидание совпадают.

Ход работы

Решите задачи

1. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\, x\le -2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & при -2<x\le 2 \\ 1 & при\, x>2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

2. Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\, x\le 1 \\ \frac{x^2}{8}-\frac{1}{8} & при\, 1<x\le 3 \\ 1 & при\, x>3 \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X;* в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

3. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\, x\le A \\ \frac{x^3}{4} & при\, A<x\le B \\ 1 & при\, x>B \end{cases}$$

Найти значения *A и B,* математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

4. Случайная величина *X* задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le 1 \\ \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} & при\, 1 < x \le 2 \\ 1 & при\, x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина *X* хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1;1,5); в) начертить графики функций.

Контрольные вопросы

1. Основные числовые характеристики НСВ. строить
2. Функция плотности и интегральная функция распределения НСВ.

Практическое занятие №7. Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки выборки.
Цель занятия:
– проверить умения строить эмпирическую функцию распределения, вычислять числовые характеристики, точечные и интервальные оценки выборки.
Оснащение:
– раздаточный материал в виде задания и таблиц.

Теоретическое обоснование.

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта.

Определение. *Генеральной совокупностью* называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов рассматриваемой совокупности.

Определение. *Выборочной совокупностью* или просто *выборкой* называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов, случайным образом отобранных из всей совокупности рассматриваемых объектов.

Определение. Наблюдаемые значения рассматриваемого признака называются *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *выборочным* или *вариационным рядом.*

Определение. Числа n_1, n_2, ..., n_k называются *частотами,* а их отношения к объему выборки, т.е. $w_i = {n_i}/{n}$, - *относительными частотами* соответствующих вариант.

Определение. Отношение $\frac{n_i^{нак}}{n}$ накопленной частоты к общему объему выборки называется *относительной накопленной частотой,* $w_i^{нак} = \frac{n_i^{нак}}{n}$

Определение. *Статистическим распределением выборки* называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Определение. Выборочным средним $\overline{x_в}$ выборки объема n со статистическим распределением называется среднее арифметическое значений признака выборки, т.е.

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

Определение. Дисперсия выборочной равна разности среднего арифметического значений квадратов признака и квадрата среднего значения признака

$$D(X) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

Задание № 1. Найти относительные частоты, накопленные частоты, накопленные относительные частоты.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Вычислим объем выборки

$$n = 3 + 10 + 7 = 20$$

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15; \qquad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{10}{20} = 0{,}5; \qquad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35;$$

$$n_1^{нак} = 0; \qquad n_2^{нак} = 0 + 3 = 3; \qquad n_3^{нак} = 10 + 3 = 13; \qquad n_4^{нак} = 10 + 3 + 7 = 20 = n$$

$$w_1^{нак} = \frac{n_1^{нак}}{n} = 0; \qquad w_2^{нак} = \frac{n_2^{нак}}{n} = 0{,}15; \qquad w_3^{нак} = \frac{n_3^{нак}}{n} = 0{,}65; \qquad w_4^{нак} = \frac{n_4^{нак}}{n} = 1$$

Задание № 2. Вычислить выборочное среднее для выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	3	4	11	5

$$\overline{x_в} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 5}{1 + 1 + 3 + 4 + 11 + 5} = \frac{113}{25} = 4{,}52$$

Задание № 4. Вычислить дисперсию выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	3	4	11	5

$$\overline{x_в} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 5}{1 + 1 + 3 + 4 + 11 + 5} = \frac{113}{25} = 4{,}52$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{25}\left(1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 11 \cdot 5^2 + 5 \cdot 6^2\right) = 22{,}04$$

$$D_в = \overline{x_в{}^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 22{,}04 - (4{,}52) = 1{,}61$$

<u>Вариационные ряды и их графическое изображение</u>

Пусть над с.в. X проведено n наблюдений т.е. из генеральной совокупности произведена выборка объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака X будем называть **вариантами**, одинаковые из них объединим в группы и оформим результаты в виде таблицы.

Статистическое распределение выборки устанавливает соответствие между наблюдаемыми значениями (вариантами) и их частотами или относительными частотами.

<u>Опр.</u> Статистический ряд состоящий из вариант, расположенных в порядке убывания или возрастания называется **ранжированным.**

Ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: дискретного и интервального.

x_i	x_1	x_2	…	x_k

n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Табл.1

Здесь x_i – наблюдаемые значения, причем $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_k$;

n_i - число наблюдаемых значений x_i, т.е. частота значения x_i в n опытах;

$w_i = \dfrac{n_i}{n}$ - относительная частота (частость) наблюдаемых значений признака X,

k-число различных значений x_i.

$\sum w_i = 1$, $\sum n_i = n$

Опр. **Модой** называется варианта с наибольшей частотой.

Опр. **Медианой** называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

Если число вариант нечетно, т.е. n=2k+1, то $M_e = x_{k+1}$;

При чётном n=2k медиана $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Пример 1. Дано статистическое распределение выборки

x_i	2	6	8	9	12
n_i	5	7	10	15	1

Найти моду M_0 и медиану M_e.

Решение: $M_0=9$; $M_e=8$

Пример 2. Дано статистическое распределение выборки

x_i	2	3	5	6	7	9
n_i	4	8	7	11	18	14

Найти моду M_0 и медиану M_e.

Решение: $M_0=7$; $M_e= (5+6):2=5,5$

Опр. **Вариационным рядом** называется ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариантов с соответствующими им весами (частотами или частостями).

Таблица 1 называется вариационным рядом.

При большом числе опытов (наблюдений) весь интервал значений X разбивают на несколько интервалов равной длины и подсчитывают число значений x_i, попавших в каждый интервал. Получаем интервальный ряд распределения

x_i	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	…	(a_{k-1}, b)
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Табл.2

Опр. Интервал между наибольшими и наименьшими значениями x_i называется зоной рассеивания с.в. X. или **размахом вариации:**

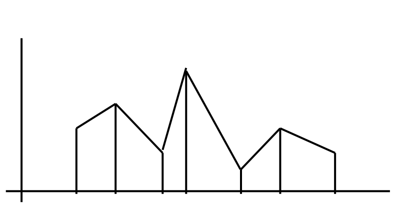
$R = x_{max} - x_{min}$

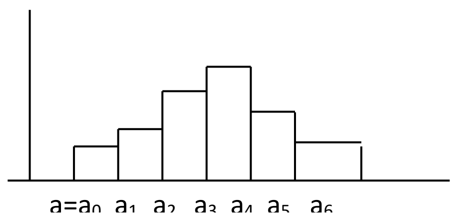
Опр. Выборка называется **сгруппированной,** если все значения, попавшие в один и тот же i-ый интервал при расчетах принимать равным одному значению, а именно середине интервала.

Графическим изображением содержания таблиц 1 и 2 является полигон частот (черт.1) и гистограмма (черт.2). Полигон распределения строится для дискретного ряда, в случае интервального строится гистограмма.

Опр. **Полигоном частот** называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \ldots, (x_k; n_k)$

Опр. **Гистограммой частот** называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями h и высотами $\frac{n_i}{h}$, где h -это длина интервала $(a_{i-1};a_i)$,





Черт1. Черт2.

Если строим гистограмму относительных частот, то в этом случае высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты).

Гистограмма является статистическим аналогом плотности распределения. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

<u>Эмпирическая функция распределения</u>

<u>Опр</u>. **Эмпирической функцией распределения** называют функцию F*(x), определяющего для каждого значения x относительную частоту события X< x

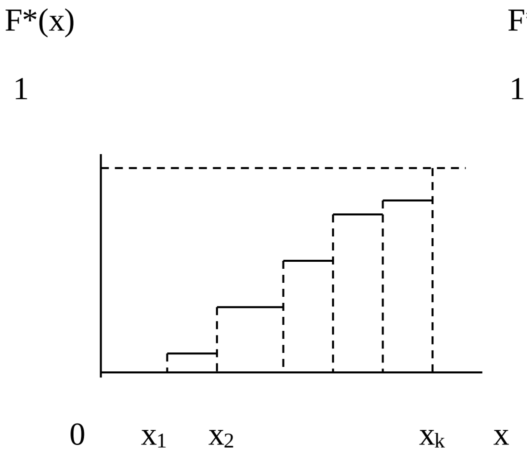
$$F^*(x) = w(X < x) = \frac{n(x)}{n} \qquad (1)$$

где n(x) –число значений x_i, меньших x.

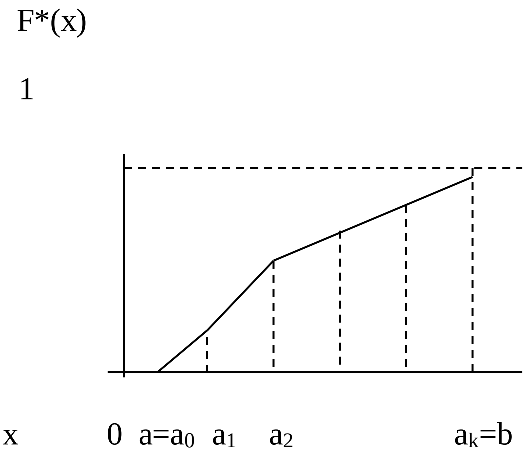
Интегральная функция распределения F(x) определяет вероятность события X<x, а эмпирическая функция F*(x) определяет относительную частоту этого же события. Эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки интегральной функции распределения генеральной совокупности.

Для дискретного вариационного ряда эмпирическая функция распределения представляет собой разрывную ступенчатую функцию по аналогии с функцией распределения для ДСВ, только теперь по оси ординат вместо вероятностей располагаются частости (черт.3).

Для интервального ряда имеем значения эмпирической функции распределения на концах интервала, соединив которые, получаем ломаную (черт 4).



черт. 3



черт. 4

<u>Свойства эмпирической функции:</u>

1.Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0, 1]

2. F*(x) - неубывающая функция

3.Если x_1- наименьшая варианта, $x_к$- наибольшая , то F*(x) = 0 при $x \le x_1$,

F*(x) = 1 при $x > x_к$

Пример 3. Дано статистическое распределение выборки

x_i	1	3	5	9
n_i	4	6	8	12

Найти значение эмпирической функции распределения F*(x) при x=5

Решение: Найдем объем выборки n= 4+6+8+12=30.

Число вариант, при которых наблюдалось значение признака меньшее 5, равно 4+6=10 раз, следовательно $F^*(x) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Ход работы:

В - 1	№ 1
В - 2	№ 2
В – 3	№ 3
В – 4	№ 4
В – 5	№ 5
В – 6	№ 6
В – 7	№ 7
В – 8	№ 8
В – 9	№ 9
В – 10	№ 10
В – 11	№ 11
В – 12	№ 12
В – 13	№ 13
В – 14	№ 14
В – 15	№ 15

В - 16	№ 16
В - 17	№ 17
В – 18	№ 18
В – 19	№ 19
В – 20	№ 20
В – 21	№ 21
В – 22	№ 22
В – 23	№ 23
В – 24	№ 24
В – 25	№ 25
В – 26	№ 26
В – 27	№ 27
В – 28	№ 28
В – 29	№ 29
В – 30	№ 30

Составьте выборку. Найти относительные частоты, накопленные частоты, накопленные относительные частоты. Вычислить дисперсию выборки**.**

№ 1. **(**2, 7, 7, 7, 5, 7, 5, 5, 7, 7)

№ 2. (8, 8, 12, 12, 12, 12, 12, 8, 12, 12, 12, 12, 12, 4, 4, 7, 7, 4, 4, 4)

№ 3. (2, 7, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 8)

№ 4. (4, 4, 7, 8, 4, 8, 8, 7, 4, 4)

№ 5. (1, 4, 1, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7)

№ 6. (2, 2, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3)

№ 7. (15, 20, 25, 30, 35, 35, 30, 25, 20, 20, 15, 15, 20, 20, 30, 30, 35, 35)

№ 8. (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 7, 5, 5, 5, 5, 3)

№ 9. (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5)

№ 10. (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4)

№ 11. (-20, 0, 0, 10, 0, 10, -20, 0, 0, 10)

№ 12. (26, 6, 6, 6, 26, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,3)

№ 13. (2, 2, 2,2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 10, 10, 10, 10)

№ 14. (1250, 1270, 1270, 1270, 1280, 1280, 1250, 1270, 1270, 1280)

№ 15. (2560, 2600, 2620, 2620, 2620, 2620, 2620, 2650, 2700, 2650, 2650, 2620, 2620, 2650, 2620, 2620, 2560, 2600, 2600, 2620)

№ 16. (186, 194, 192, 192, 194, 186, 194, 192, 192, 192)

№ 17. (8, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 8, 4, 1)

№ 18. (102, 108, 108, 104, 108, 104, 108, 104, 102, 108)

№ 19. (0,1; 0,1; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,1; 0,1; 0,1; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,8; 0,8; 0,8; 0,8; 0,6; 0,6; 06; 0,6; 0,6; 0,6; 0,8; 0,8; 0,8)

№ 20. x_i = (1250; 1275; 1280; 1300); n_i = (20; 25; 50; 5)

№ 21. x_i = (0,01; 0,05; 0,09); n_i = (2; 3; 5)

№ 22. x_i = (23,5; 26,1; 28,2; 30,4); n_i = (2; 3; 4; 1)

№ 23. x_i = (0; 1; 2; 3; 4); n_i = (132; 43; 20; 3; 2)

№ 24. x_i = (0; 1; 2; 3; 4); n_i = (5; 2; 1; 1; 1)

№ 25. x_i = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6); n_i = (405; 366; 175; 40; 8; 4; 2)

№ 26. x_i = (3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21); n_i = (21; 16; 15; 26; 22; 14; 21; 22; 18; 25)

№ 27. x_i = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10); n_i = (28; 47; 81; 67; 53; 24; 13; 8; 3; 2; 1)

№ 28. x_i = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7); n_i = (2; 3; 10; 22; 26; 20; 12; 5)

№ 29. x_i = (18,4; 18,9; 19,3; 19,6); n_i = (5; 10; 20; 15)

№ 30. x_i = (-2; 0; 4; 4); n_i = (2; 3; 0,1; 5)

Контрольные вопросы:

1) Что называется *генеральной совокупностью*?

2) Напишите формулу вычисления среднего арифметического значения признака выборки.

3) Что называется *выборкой ?*

4) Как находится *относительная частота?*

5) Как находится *относительная накопленная частота?*

Контрольные вопросы

1. Эмпирическаяфункция распределения.
2. Числовые характеристики выборки.
3. Точечные и интервальные оценки выборки.