Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финуниверситет)

Самарский финансово-экономический колледж
(Самарский филиал Финуниверситета)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по учебно-методической работе
_______________Л.А Косенкова
« 21 » февраля 20 22 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОУД.09 МАТЕМАТИКА»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 09.02.07 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Самара – 2022

Методические указания по организации и выполнению практических занятий разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Математика» и в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 г. № 413 (ред. от 11.12.2020 г. № 712), с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного приказом Министерства образования науки Российской Федерации от 09.12.2016 года № 1547

Присваиваемая квалификация: администратор баз данных

Разработчики:

Петрова В.П. ____________________ Преподаватель Самарского филиала Финуниверситета

Методические указания по организации и выполнению практических занятий рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании предметной (цикловой) комиссии естественно-математических дисциплин

Протокол от «24» января 2022 г. № 5

Председатель ПЦК ____________________ М.В. Писцова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данные методические указания составлены для выполнения обучающимися практических занятий по учебной дисциплине «Математика» в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, утвержденного Министерством образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 №413 (ред. от 29.12.2011 №1645, от 31.12.2015 №1578, от 29.06.2017 №613), предъявляемыми к структуре, содержанию и результатам освоения учебной дисциплины «Математика» по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Учебная дисциплина «Математика» является базовой дисциплиной обязательной предметной области «Математика» ФГОС среднего общего образования в рамках общеобразовательной подготовки основной образовательной программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Цели изучения учебной дисциплины:

– формирование умений и навыков финансово-экономических расчетов;

– обучение студентов методам и моделям количественного обоснования решений на каждом этапе развития финансово-коммерческих операций;

– изучение задач различной сложности в финансовой сфере, которые могут быть решены более успешно на основе арсенала экономико-математических методов и моделей с использованием персональных компьютеров.

Результаты изучения учебной дисциплины:

личностные:

− сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;

− понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей;

− развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

− овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

− готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

− готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности;

− готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

− отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

метапредметные:

− умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

− умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

− владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

− готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
− владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
− владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;
− целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;
предметные:
− сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
− сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
− владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
− владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
− сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
− владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
− сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
− владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся **должен**
иметь практический опыт: решения прикладных задач в области профессиональной деятельности
уметь:
– решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
знать:
– значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ООППССЗ;
– основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
– основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
– основы интегрального и дифференциального исчисления.

Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем в часах
Объем образовательной программы учебной дисциплины	252
Объем работы обучающихся во взаимодействии с преподавателем	234
в том числе:	
теоретическое обучение	100
практические занятия	134
самостоятельная работа	
Промежуточная аттестация в форме экзамена	18
В т.ч. консультации	2
экзамен	16

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Нахождение приближённых значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной) и сравнение числовых выражений.

Практическое занятие №2, **№3.** Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

Практическое занятие №4. Свойства корня натуральной степени из числа.

Практическое занятие №5. Свойства степени с рациональными и действительными показателями.

Практическое занятие №6. Свойства степени с рациональными и действительными показателями.

Практическое занятие №7. Свойства логарифмов. Основное логарифмическое тождество.

Практическое занятие №8. Правила действия с логарифмами.

Практическое занятие №9. Правила действия с логарифмами.

Практическое занятие №10. Преобразование рациональных, иррациональных и степенных выражений.

Практическое занятие №11. Преобразование показательных и логарифмических выражений.

Практическое занятие №12. Основные тригонометрические тождества. Преобразование простейших тригонометрических выражений.

Практическое занятие №13. Формулы приведения. Преобразование тригонометрических выражений.

Практическое занятие №14. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

Практическое занятие №15. Преобразование тригонометрических выражений.

Практическое занятие №16. Преобразование тригонометрических выражений.

Практическое занятие №17. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Практическое занятие №18. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Практическое занятие №19. Различные методы решения тригонометрических уравнений.

Практическое занятие №20. Различные методы решения тригонометрических уравнений.

Практическое занятие №21. Решение простейших тригонометрических неравенств.

Практическое занятие №22. Построение графиков функций, заданных различными способами.

Практическое занятие №23. Построение графиков функций, заданных различными способами.

Практическое занятие №24. Область определения и область значений обратной функции.

Практическое занятие № 25. Степенные функции, их свойства и графики.

Практическое занятие № 26. Показательные и логарифмические функции, их свойства и графики.

Практическое занятие №27. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Практическое занятие №28. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Практическое занятие №29.Числовая последовательность. Способы задания суммирование

Практическое занятие №30. Предел последовательности и предел функции. Основные теоремы о пределах. Раскрытие основных неопределенностей и замечательные пределы.

Практическое занятие №31. Производные основных элементарных функций.
Геометрический и экономический смысл производной. Производные высших порядков.

Практическое занятие №32. Исследование функции с помощью первой производной.

Практическое занятие №33. Применение производной к исследованию функций и построения графиков функций.

Практическое занятие № 34. Вычисление неопределенных интегралов. Методы интегрирования.

Практическое занятие №35. Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.
Практическое занятие №36. Решение рациональных и иррациональных уравнений и их систем.
Практическое занятие №37. Решение показательных уравнений и их систем.
Практическое занятие №38. Решение логарифмических уравнений и их систем.
Практическое занятие №39. Решение тригонометрических уравнений и их систем.
Практическое занятие №40. Метод интервалов.
Практическое занятие №41. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.
Практическое занятие №42. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.
Практическое занятие № 43. Перестановки, размещения, сочетания.
Практическое занятие №44. Решение задач на перебор вариантов.
Практическое занятие №45. Задачи на нахождение вероятности события.
Практическое занятие №46. Закон распределения случайной величины и её числовые характеристики.
Практическое занятие №47. Представление данных, генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.
Практическое занятие №48. Решение вероятностных и статистических задач с практического характера.
Практическое занятие №49. Параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей, признаки и свойства.
Практическое занятие №50. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.
Практическое занятие №51. Перпендикулярность плоскостей.
Практическое занятие №52. Геометрические преобразования пространства. Площадь проекции плоской фигуры.
Практическое занятие №53. Площадь проекции плоской фигуры.
Практическое занятие №54 Призма. Параллелепипед. Куб.
Практическое занятие №55. Сечение куба, призмы и пирамиды.
Практическое занятие №56. Сечение куба, призмы и пирамиды.
Практическое занятие №57. Цилиндр. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.
Практическое занятие №58. Конус и усеченный конус. Их осевые сечения и сечения, параллельные основанию.
Практическое занятие №59. Шар и сфера, их сечения.
Практическое занятие №60. Вычисление объемов многогранников объемов и тел вращения. Интегральная формула объема.
Практическое занятие №61. Вычисление объемов многогранников объемов и тел вращения. Интегральная формула объема.
Практическое занятие №62. Вычисление площадей поверхностей многогранников и тел вращения.
Практическое занятие №63. Вычисление площадей поверхностей многогранников и тел вращения.
Практическое занятие №64. Координаты вектора. Длина вектора. Операции над векторами, заданными своими координатами.
Практическое занятие №65. Координаты вектора. Длина вектора. Операции над векторами, заданными своими координатами.
Практическое занятие №66. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.
Практическое занятие №67. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Практическое занятие №1. Нахождение приближённых значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной) и сравнение числовых выражений.
Цель:
– ознакомиться с теорией приближённых значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной) и сравнения числовых выражений, овладеть методикой нахождение приближённых значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной) и сравнения числовых выражений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
1) Конечные и бесконечные дроби. Действительные числа.
Натуральные числа определение – это целые положительные числа. Натуральные числа используют для счета предметов и многих иных целей. Вот эти числа: 1; 2; 3; 4;...
Это натуральный ряд чисел.
Ноль натуральное число? Нет, ноль не является натуральным числом. Сколько натуральных чисел существует? Существует бесконечное множество натуральных чисел. Каково наименьшее натуральное число? Единица — это наименьшее натуральное число. Каково наибольшее натуральное число? Его невозможно указать, ведь существует бесконечное множество натуральных чисел.
Сумма натуральных чисел есть натуральное число. Итак, сложение натуральных чисел a и b:
a + b = c
c - это всегда натуральное число.
Произведение натуральных чисел есть натуральное число. Итак, произведение натуральных чисел a и b:
a * b = c
c - это всегда натуральное число.
Разность натуральных чисел не всегда есть натуральное число. Если уменьшаемое больше вычитаемого, то разность натуральных чисел есть натуральное число, иначе — нет.
Частное натуральных чисел не всегда есть натуральное число. Если для натуральных чисел a и b
a : b = c
где c — натуральное число, то это значит, что a делится на b нацело. В этом примере a — делимое, b — делитель, c — частное.
Делитель натурального числа - это натуральное число, на которое первое число делится нацело.
Каждое натуральное число делится на единицу и на себя.
Простые натуральные числа делятся только на единицу и на себя. Здесь, имеется ввиду, делятся нацело. Пример, числа 2; 3; 5; 7 делятся только на единицу и на себя. Это простые натуральные числа.
Единицу не считают простым числом.
Числа, которые больше единицы и которые не являются простыми, называют составными. Примеры составных чисел: 4; 6; 8; 9; 10
Единицу не считают составным числом.
Множество натуральных чисел составляют единица, простые числа и составные числа.
Множество натуральных чисел обозначается латинской буквой N.
Свойства сложения и умножения натуральных чисел:
переместительное свойство сложения
a + b = b + a;
сочетательное свойство сложения
(a + b) + c = a + (b + c);
переместительное свойство умножения
ab = ba;
сочетательное свойство умножения
(ab) c = a (bc);

распределительное свойство умножения
a (b + c) = ab + ac;
Целые числа
Целые числа - это натуральные числа, ноль и числа, противоположные натуральным.
Числа, противоположные натуральным - это целые отрицательные числа, например: -1; -2; -3; -4;...
Множество целых чисел обозначается латинской буквой Z.
Рациональные числа
Рациональные числа - это целые числа и дроби.
Любое рациональное число может быть представлено в виде периодической дроби. Примеры: -1,(0); 3,(6); 0,(0);...
Из примеров видно, что любое целое число есть периодическая дробь с периодом ноль.
Любое рациональное число может быть представлено в виде дроби m/n, где m целое число,n натуральное число. Представим в виде такой дроби число 3,(6) из предыдущего примера: 22/6 = 3,(6);
Другой пример: рациональное число 9 может быть представлено в виде простой дроби как 18/2 или как 36/4.
Ещё пример: рациональное число -9 может быть представлено в виде простой дроби как -18/2 или как -72/8.
Множество рациональных чисел обозначается латинской буквой Q.
Иррациональные числа
Иррациональные числа - это бесконечные непериодические десятичные дроби.
Примеры: число пи = 3,141592... число е = 2,718281...
Действительные числа
Действительные числа – это все рациональные и все иррациональные числа.
Множество действительных чисел обозначается латинской буквой R.

1. Правила обращения периодической дроби в обыкновенную.

а) Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно в числителе её период, а в знаменателе число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.

б) Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числителе, а в знаменателе записать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр между запятой и периодом.

2)*Вычисление погрешности приближений.*

Для современных задач необходимо использовать сложный математический аппарат и развитые методы их решения. При этом часто приходится встречаться с задачами, для которых аналитическое решение, т.е. решение в виде аналитического выражения, связывающего исходные данные с требуемыми результатами, либо вообще невозможно, либо выражается такими громоздкими формулами, что использование их для практических целей нецелесообразно.

В этом случае применяются численные методы решения, которые позволяют достаточно просто получить численное решение поставленной задачи. Численные методы реализуются с помощью вычислительных алгоритмов.

Все многообразие численных методов подразделяют на две группы:

Точные – предполагают, что если вычисления ведутся точно, то с помощью конечного числа арифметических и логических операций могут быть получены точные значения искомых величин.

Приближенные– которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение задачи лишь с заданной точностью.

1. величина и число. Величиной называется то, что в определенных единицах может быть выражено числом.

Когда говорят о значении величины, то имеют в виду некоторое число, называемое числовым значением величины, и единицу ее измерения.

Таким образом, величиной называют характеристику свойства объекта или явления, которая является общей для множества объектов, но имеет индивидуальные значения для каждого из них.
Величины могут быть постоянными и переменными. Если при некоторых условиях величина принимает только одно значение и не может его изменять, то она называется постоянной, если же она может принимать различные значения, то – переменной. Так, ускорение свободного падения тела в данном месте земной поверхности есть величина постоянная, принимающая единственное числовое значение g=9,81… м/с2, в то время как путь s, проходимый материальной точкой при ее движении, – величина переменная.
2. приближенные значения чисел. Значение величины, в истинности которого мы не сомневаемся, называется точным. Часто, однако, отыскивая значение какой-либо величины, получают лишь ее приближенное значение. В практике вычислений чаще всего приходится иметь дело с приближенными значениями чисел. Так, p – число точное, но вследствие его иррациональности можно пользоваться лишь его приближенным значением.
Во многих задачах из-за сложности, а часто и невозможности получения точных решений применяются приближенные методы решения, к ним относятся: приближенное решение уравнений, интерполирование функций, приближенное вычисление интегралов и др.
Главным требованием к приближенным расчетам является соблюдение заданной точности промежуточных вычислений и конечного результата. При этом в одинаковой степени недопустимы как увеличение погрешностей (ошибок) путем неоправданного загрубления расчетов, так и удержание избыточных цифр, не соответствующих фактической точности.
Существуют два класса ошибок, получающихся при вычислениях и округлении чисел – абсолютные и относительные.
1. Абсолютная погрешность (ошибка).
Введем обозначения:
Пусть А – точное значение некоторой величины, Запись **a » A**будем читать "а приближенно равно А". Иногда будем писать А = а, имея в виду, что речь идет о приближенном равенстве.
Если известно, что а < А, то а называют *приближенным значением величины А с недостатком.* Если а > А, то а называют *приближенным значением величины А с избытком.*
Разность точного и приближенного значений величины называется *погрешностью приближения* и обозначается D, т.е.
D = A – a (1)
Погрешность D приближения может быть как числом положительным, так и отрицательным.
Для того чтобы охарактеризовать отличие приближенного значения величины от точного, часто бывает достаточно указать абсолютную величину разности точного и приближенного значений.
Абсолютная величина разности между приближенным **а** и точным **А** значениями числа называется **абсолютной погрешностью (ошибкой) приближения** и обозначается D_a:
D_a = ½a – A½ (2)
Пример 1. При измерении отрезка *l* использовали линейку, цена деления шкалы которой равна 0,5 см. Получили приближенное значение длины отрезка a = 204 см.
Понятно, что при измерении могли ошибиться не более, чем на 0,5 см, т.е. абсолютная погрешность измерения не превышает 0,5 см.
Обычно абсолютная ошибка неизвестна, поскольку неизвестно точное значение числа А. Поэтому в качестве ошибки принимают какую-либо **оценку** абсолютной ошибки:
D_a <= $D_{a\ пред.}$ (3)
где $D_{a\ пред.}$ – предельная ошибка (число, **большее** нуля), задаваемая с учетом того, с какой достоверностью известно число а.
Предельная абсолютная погрешность называется также *границей погрешности*. Так, в приведенном примере,
$D_{a\ пред.}$= 0,5 см.
Из (3) получаем: D_a = ½a – A½<= $D_{a\ пред.}$. и тогда
a – $D_{a\ пред.}$ ≤ A ≤ a + $D_{a\ пред.}$. (4)

Значит, **a** – **D*a пред.*** будет приближенным значением **A** с недостатком, а **a** + **D*a пред*** – приближенным значением **A** с избытком. Пользуются также краткой записью: $A = a \pm D_{a\ пред}$ (5)
Из определения предельной абсолютной погрешности следует, что чисел $D_{a\ пред}$, удовлетворяющих неравенству (3), будет бесконечное множество. На практике стараются выбрать**возможно меньшее** из чисел $D_{a\ пред}$, удовлетворяющих неравенству $D_a <= D_{a\ пред.}$

Пример 2. Определим предельную абсолютную погрешность числа $a=3,14$, взятого в качестве приближенного значения числа π.
Известно, что $3,14<\pi<3,15$. Отсюда следует, что
$|a - \pi| < 0,01$.
За предельную абсолютную погрешность можно принять число $D_a = 0,01$.
Если же учесть, что $3,14<\pi<3,142$, то получим лучшую оценку: $D_a = 0,002$, тогда $\pi \approx 3,14 \pm 0,002$.

Относительная погрешность (ошибка). Знания только абсолютной погрешности недостаточно для характеристики качества измерения.
Пусть, например, при взвешивании двух тел получены следующие результаты:
$P_1 = 240,3 \pm 0,1$ г.
$P_2 = 3,8 \pm 0,1$ г.
Хотя абсолютные погрешности измерения обоих результатов одинаковы, качество измерения в первом случае будет лучшим, чем во втором. Оно характеризуется относительной погрешностью.

Относительной погрешностью (ошибкой) приближения числа **A** называется отношение абсолютной ошибки D_a приближения к абсолютной величине числа A:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} \qquad (A \neq 0)$$

Так, как точное значение величины обычно неизвестно, то его заменяют приближенным значением и тогда:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a|} \qquad (a \neq 0)$$

Предельной относительной погрешностью или *границей относительной погрешности приближения,* называется число $d_{a\ пред.} > 0$, такое, что:
$d_a <= d_{a\ пред.}$
За предельную относительную погрешность можно, очевидно, принять отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного значения:

$$\delta_{a\ пред} = \frac{\Delta_{a\ пред.}}{|a|}$$

Из (9) легко получается следующее важное соотношение:
$\Delta_{a\ пред\ .} = |a|\ d_{a\ пред.}$
Предельную относительную погрешность принято выражать в процентах:

$$\delta_{a\ пред.} = \frac{\Delta_{a\ пред.}}{|a|} \cdot 100\%$$

Пример. Основание натуральных логарифмов для расчета принято равным e=2,72. В качестве точного значения взяли $e_т$= 2,7183. Найти абсолютную и относительную ошибки приближенного числа.
D_e = ½$e - e_т$½=0,0017;

$$\delta_e = \frac{\Delta_e}{|e_T|} \cdot 100\% = \frac{0{,}0017}{2{,}7183} \cdot 100\% = 0{,}062\%$$

.

Величина относительной ошибки остается неизменной при пропорциональном изменении самого приближенного числа и его абсолютной ошибки. Так, у числа 634,7, рассчитанного с абсолютной ошибкой D = 1,3 и у числа 6347 с ошибкой D = 13 относительные ошибки одинаковы: d = 0,2.

Пример 1. Точное значение измеряемой величины равно 2,500, а приблизительное равно 2,471. Найти: 1) абсолютную погрешность; 2) относительную погрешность; 3) верные цифры приближенного значения 2,471.

Решение. 1) Здесь a=2500, x=2,471; тогда АО формуле (1) находим $\Delta_a x = |2{,}500-2{,}471| = 0{,}029$.

2) По формуле (2) получим $\omega_a x = 0{,}029:2{,}471 \approx 0{,}0117 = 1{,}17\%$.

3) Для определения верных цифр приближенного значения 2,471 вычислим $x + \Delta_a x = 2{,}471 + 0{,}029 = 2{,}500$ и $x - \Delta_a x = 2{,}471 - 0{,}029 = 2{,}447$. Сравнивая полученные величины, устанавливаем, что цифра 2 – верная, а цифры 4, 7 и 1 –сомнительные.

Пример 2. Пусть $a=5{,}0\pm0{,}1$, $b=3.4\pm0.2$. Вычислить a+b, a-b, ab, a/b. Оценить относительные погрешности результатов для ab и a/b.

Решение. Здесь a=5,0, y=3,4, $\Delta_a x=\Delta_a=0{,}1$, $\Delta_b y=\Delta_b=0{,}2$. Тогда $\Delta_{a+b}=\Delta_{a-b}=\Delta_a+\Delta_b=0{,}1+0{,}2=0{,}3$, откуда $a + b=8{,}4\pm03$ и $a - b=1{,}6\pm0{,}3$.

Найдем относительные погрешности:

$$\omega_{a+b}=\frac{\Delta a+b}{|x+y|}=\frac{0{,}3}{8{,}4}\approx 0{,}036=3{,}6\%$$

$$\omega_{a-b}=\frac{\mathbf{\Delta a-b}}{\mathbf{|x-y|}}=\frac{\mathbf{0{,}3}}{\mathbf{1{,}6}}\approx 0{,}186 = 18{,}6\%$$

$$\Delta_{ab}=y\Delta_a+x\Delta_b=3{,}4\cdot0{,}1+5{,}0\cdot0{,}2\approx1{,}34.$$

$$\Delta_{a/b}=\frac{|y|\Delta a+|x|\mathbf{\Delta b}}{\mathbf{y2}}=\frac{\mathbf{3{,}4\cdot0{,}1+5{,}0\cdot0{,}2}}{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3{,}4}}}\approx0{,}116$$

Следовательно, $ab=17{,}0\pm1{,}34$, $a/b=1.47\pm0.116$.

Оценим относительные погрешности полученных результатов для ab и a/b:

$$\omega_{ab}=\omega_a+\omega_b=\frac{\Delta a}{|x|}+\frac{\mathbf{\Delta b}}{|y|}=\frac{\mathbf{0{,}1}}{\mathbf{5{,}0}}+\frac{\mathbf{0{,}2}}{\mathbf{3{,}4}}=0{,}06=6\%; \quad \omega_{a/b}=\omega_{ab}=6\%$$

Пример 3. Вычислить $(2{,}78+13{,}8)^3 - \frac{\mathbf{3{,}14\cdot8{,}17+\sqrt{6{,}82}}}{\mathbf{9{,}183-2{,}15}}$.

Решение. Последовательно находим:

1) $2{,}78+13{,}8\approx2{,}8+13{,}8=16{,}6$; 2) $(2{,}78 + 13{,}8)^3\approx16{,}6^3\approx4574{,}3$;

3) $3{,}14\cdot8{,}17\approx25{,}65$; 4) $3{,}14\cdot8{,}17+\sqrt{\mathbf{6{,}82}}\approx25{,}65+2{,}61=28{,}26$;

5) $9{,}183-2{,}15\approx9{,}18-2{,}15=7{,}03$; 6) $28{,}26:7{,}03\approx4{,}02$; 7) $4574{,}3-4{,}02=4570{,}28\approx4570{,}3$.

Пример 4. С какой относительной погрешностью следует измерить размеры комнаты, чтобы относительная погрешность величины площади не превышала 2%?

Решение. Пусть a и b – длина и ширина комнаты. Тогда площадь комнаты S=ab. Так как $\omega_s=\omega_a+\omega_b<2\%$, то следует измерить с относительной погрешностью, не превышающей 1%.

Задания для практического занятия:

№1: Выпишите все простые числа от 1 до 40.

№2: Выпишите все составные числа от 41 до 60.

№3: Представьте в виде произведения двух простых чисел следующие натуральные числа: а) 77; б) 57; в) 161; г) 143.

№4: Найдите наибольший общий делитель следующих чисел:

а) 252,441,108; б) 234,1080,8100; в) 118,284,179.

№5: Среди следующих пар чисел найдите пары взаимно простых:

а) 39и 259; б) 15 и 22; в)175 и 35; г)31 и 199.

№6: Найдите наименьшее общее кратное следующих чисел:

а) 15,10,6; б) 252,441,1080; в) 234,1080,8100.

№7: Какие числа делятся, на: а) 3; б) 9; в) 5; г) 4; д) 25?

№8: Какие из данных чисел делятся на 2,3,4,9,10,25:

а) 1392; б) 2475; в) 2970; г) 197?

№9: представьте в виде периодической дроби следующие числа:

а)$\frac{2}{3}$; б) $6\frac{4}{9}$; в) $8\frac{8}{9}$; г) - $5\frac{3}{7}$.

№10: Запишите в виде обыкновенной дроби следующие периодические десятичные дроби:

а) 0,(4); б) 0,(7); в) 0,(12); г)0,(41); д) 0,1(3); е) 5,11(25).

№11 Выполните действия:

а) (2,125 · 0,32 – 1,93) : 2,5 – 0,5.

б) 6,75 – 6,75 · (0,45 – 6,72 : 6,4).

в) $\dfrac{0{,}15-0{,}15\cdot 6{,}4}{-\frac{3}{8}+0{,}175}$

г) $\dfrac{1{,}6\cdot 0{,}81-0{,}81}{3{,}57-3\frac{3}{4}}$.

д) $-0{,}09\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right):\left(3{,}57:3{,}5-1{,}1\right)$.

е) $\left(1{,}68:1{,}6-1{,}5\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right):\left(-0{,}09\right)$.

ж) $\left(\frac{11}{15}-1\frac{9}{10}+\frac{5}{8}\right)\cdot 0{,}9+0{,}1$.

з) $0{,}8+0{,}2:\left(\frac{7}{15}-1\frac{1}{12}+\frac{9}{20}\right)$.

и) $-1{,}5+0{,}5\cdot\left(\frac{8}{15}-1{,}7+\frac{1}{6}\right)$.

к) $\left(-3\frac{4}{15}-\frac{3}{20}+\frac{5}{12}\right)\cdot 0{,}6-0{,}6$.

№12 Вычислить 15% от 84.

№13 Найти число, если 8% его равны 24.

№14 На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, а другое – на 50%?

№15

1). Найдите абсолютную погрешность, и в приближенном значении x определите верные и сомнительные цифры: а) a=3,813, x3,841; б) a=12,71, x=12,68; в) a108,513, x=109,623; г) a=5,3, x=4,7; д) a=7,41, x=7,54; е) a=2103, x=20,97.

2). Найдите относительную погрешность и выразите ее в процентах. В приближенном значении x определите верные и сомнительные цифры: а) a=19,83, x=19,76; б) a=109,142, x=109,128; в) a=7,013, x=7,028; г) a=32,301, x=32,287; д) a=13,25, x=13,42; е) a=1045,6, x=1027,9.

3). Найдите верные и сомнительные цифры в записи приближений: а) 21,327 ± 0,032; б) 13,1014±0,013; в) 0,2013±0,0012; г) 1103,12±0,09; д) 13,1276±0,0005; е) 112,031±0,12; ж) 313,54±0,07; з) 21,312±0,052; и) 27,032±0,14.

4). Найдите сумму и разность и оцените относительную погрешность результатов: а) 3,72±0,03, 12,53±0,01; б) -2,82±0,07, 9,8±0,3; в) 4,51±0,02, -1,8±0,4; г)8,785±0,002; 0,213±0,007.

5). Найдите произведение и частное и оцените относительную погрешность результатов: а) 3,782±0,003; 5,014±0,002; б) 25,028±0,007; 9,128±0,003; в) 0,21±0,02; 3,2±0,3; г) -2,17±0,02; 31,8±0,5.

6). Возведите в степень и оцените относительную погрешность:

а) x=13,78±0,04, α=3; б) x=4,09±0,02, α=4; в) x=5,7±0,3, α=1/2; г) x=8,13±0,02, α=1/2.

7). Длина и ширина прямоугольной комнаты соответственно равны (3,87±0,05)м и (5,14±0,05)м. Найдите площадь комнаты.

8). Железная заготовка имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого равны (31,28±0,01)мм, (14,12±0,01)мм, (40,63±0,01)мм. Найдите массу заготовки, если плотность железа равна (7,60+0,05) г/см3.

9). Площадь большого гидравлического пресса S1=(240±1) см3, а малого S2=(12±0,2)см2. Достаточно ли силы (460±5) Н на малом поршне, чтобы получить на большем не менее 8300 Н? (Трение не учитывать).

Практическое занятие №2, №3. Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.
Цель:
– ознакомиться с понятием комплексного числа в алгебраической и тригонометрической форме, овладеть методикой выполнения действий над комплексными числами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$Например. $z = 3 - 7i$
Действительная и мнимая часть комплексного числа
Действительное число называется действительной частью комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $a = \mathrm{Re}\ z$ (От французского слова reel - действительный).
Действительное число называется мнимой частью числа $z = a + bi$ и обозначается $b = \mathrm{Im}\ z$ (От французского слова imaginaire - мнимый).
Например. Для комплексного числа $z = 3 - 7i$ действительная часть $a = \mathrm{Re}\ z = 3$, а мнимая - $b = \mathrm{Im}\ z = -7$.
Если действительная часть комплексного числа $z = a + bi$ равна нулю ($a = \mathrm{Re}\ z = 0$), то комплексное число называется **чисто мнимым**.
Например. $z = -2i$
Мнимая единица
Величина i называется мнимой единицей и удовлетворяет соотношению:
$$i^2 = -1$$
Равные комплексные числа
Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$
Задание. Определить при каких значениях x и y числа $z_1 = 2 - xi$ и $z_2 = y + 2i$ будут равными.
Решение. Согласно определению $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда
$$2 = y \wedge -x = 2 \Rightarrow y = 2,\ x = -2$$
Ответ. $x = -2,\ y = 2$
Число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексно сопряженным числом к числу $z = a + bi$.
То есть комплексно сопряженные числа отличаются лишь знаком мнимой части.
Например. Для комплексного числа $z_1 = 2 + 3i$ комплексно сопряженным есть число $\bar{z}_1 = 2 - 3i$; для $z_2 = i$комплексно сопряженное $\bar{z}_2 = -i$ и для $z_3 = -2$ имеем, что $\bar{z}_3 = -2$.
Комплексное число $-z = -a - bi$ называется противоположным к комплексному числу $z = a + bi$.
Например. Противоположным к числу $z = 2 + i$ есть число: $-z = -(2 + i) = -2 - i$.
Сложение комплексных чисел
Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, которое равно
$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
То есть суммой двух комплексных чисел есть комплексное число, действительная и мнимая части которого есть суммой действительных и мнимых частей чисел-слагаемых соответственно.
Задание. Найти сумму $z_1 + z_2$, если $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = -3 + 2i$.
Решение. Искомая сумма равна

$z_1 + z_2 = 5 - 6i + (-3 + 2i) = (5 + (-3)) + (-6 + 2)i = 2 - 4i$

Ответ. $z_1 + z_2 = 2 - 4i$

Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2$, действительная и мнимая части которого есть разностью действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2 соответственно:

$z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Задание. Найти разность $z_1 - z_2$, если $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = -3 + 2i$.

Решение. Действительная часть искомого комплексного числа равна разности действительных частей чисел z_1 и z_2, а мнимая - мнимых частей этих чисел, то есть

$z_1 - z_2 = 5 - 6i - (-3 + 2i) = (5 - (-3)) + (-6 - 2)i = 8 - 8i$

Ответ. $z_1 - z_2 = 8 - 8i$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, равное

$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

На практике чаще всего комплексные числа перемножают как алгебраические двучлены $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$, просто раскрыв скобки, в полученном результате надо учесть, что $i^2 = -1$.

Задание. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 + i$.

Решение. Перемножим заданные комплексные числа как два двучлена, то есть

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-1 + i) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot i + 3i \cdot (-1) + 3i \cdot i =$

$= -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 - i + 3 \cdot (-1) = -5 - i$

Ответ. $z_1 \cdot z_2 = -5 - i$

Комплексно сопряженные числа

Если $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$ называется **комплексным сопряженным** к числу z.

$$\bar{z} = a - bi$$

То есть у комплексно сопряженных чисел действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Например. Комплексно сопряженным к числу $z = 2 - i$ есть число $\bar{z} = 2 + i$.

На комплексной плоскости комплексно сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно действительной оси.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Если $z = \bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число z является действительным.

Например. $z = 2 \in R \ \Rightarrow \ \bar{z} = 2$ и $z = \bar{z}$

2) Для любого комплексного числа z сумма $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\ z$ - действительное число.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, тогда $\bar{z} = 2 + 3i$, а тогда

$z + \bar{z} = 2 - 3i + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4 \in R$

3) Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$ произведение $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение

$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$

$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

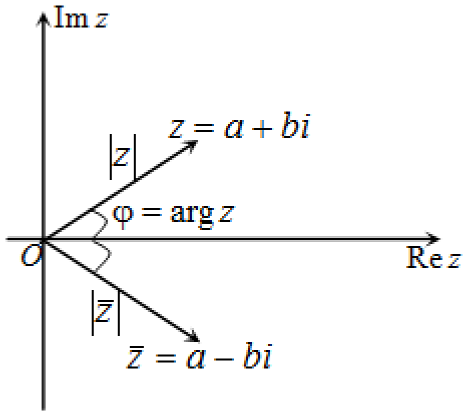


Рис. 1

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8) $\overline{(\bar{z})} = z$

9) Если $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ - комплексно сопряженные числа, то

$a = \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $b = \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Комплексные числа изображаются на так называемой комплексной плоскости. Ось, соответствующая в прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, называется действительной осью, а оси ординат - мнимой осью (рис. 1).

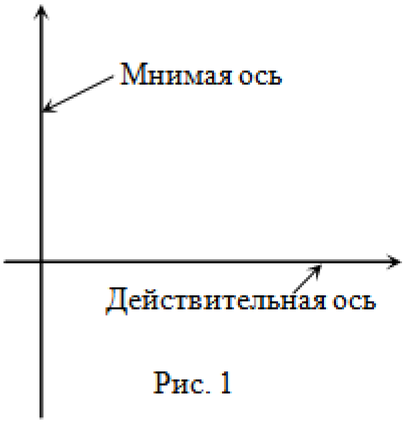


Рис. 1

Комплексному числу $z = a + bi$ будет однозначно соответствовать на комплексной плоскости точка $(a; b)$: $z = a + bi \;\leftrightarrow\; (a; b)$ (рис. 2). То есть на действительной оси откладывается действительная часть комплексного числа, а на мнимой - мнимая.

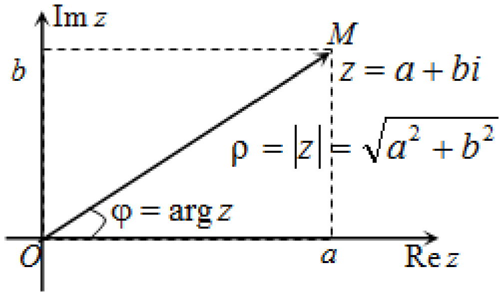


Рис. 2

Например. На рисунке 3 на комплексной плоскости изображены числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = i$ и $z_3 = -2$.

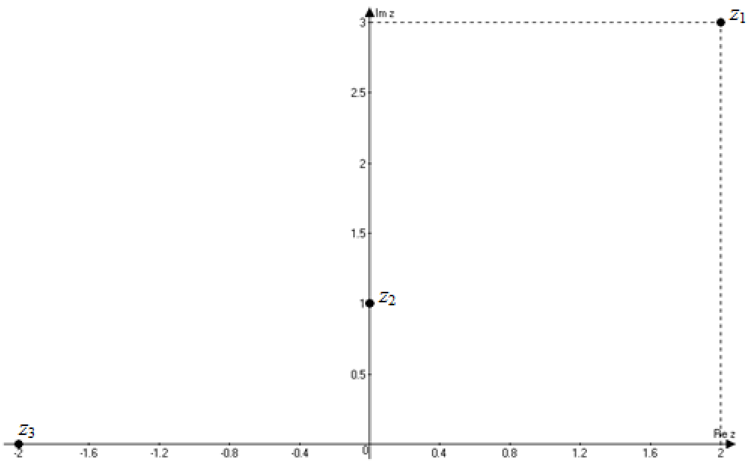


Рис. 3

Модуль комплексного числа

Комплексное число также можно изображать радиус-вектором $\overline{OM}$ (рис. 2). Длина радиус-вектора, изображающего комплексное число $z = a + bi$, называется модулем этого комплексного числа.

Модуль любого ненулевого комплексного числа есть положительное число. Модули комплексно сопряженных чисел равны. Модуль произведения/частного двух комплексных чисел равен произведению/частному модулей каждого из чисел.

Модуль вычисляется по формуле:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

То есть модуль есть сумма квадратов действительной и мнимой частей заданного числа.

Задание. Найти модуль комплексного числа $z = 5 - 3i$

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = -3$, то искомое значение

$$|z| = |5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Ответ. $|z| = \sqrt{34}$

Иногда еще модуль комплексного числа обозначается как r или ρ .

Аргумент комплексного числа

Угол ϕ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектора $\overline{OM}$, соответствующим комплексному числу $z = a + bi$, называется аргументом этого числа и обозначается $\arg z$.

Аргумент ϕ комплексного числа $z = a + bi$ связан с его действительной и мнимой частями соотношениями:

$$\phi = \operatorname{tg} \frac{b}{a}\ , \quad \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ , \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

На практике для вычисления аргумента комплексного числа обычно пользуются формулой:

$$\phi = \arg\ z = \arg\ (a + bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\ , & a \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi\ , & a < 0 \end{cases}$$

Задание. Найти аргумент комплексного числа $z = -3 - 3i$

Решение. Так как $a = \operatorname{Re}\ z = -3 < 0$, то в выше приведенной формуле будем рассматривать вторую строку, то есть

$$\phi = \arg\ z = \operatorname{arctg} \frac{-3}{-3} + \pi = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Ответ. $\phi = \arg\ z = \dfrac{5\pi}{4}$

Аргумент действительного положительного числа равен 0°, действительного отрицательного - π или 180°. Чисто мнимые числа с положительной мнимой частью имеют аргумент равный $\frac{\pi}{2}$, с отрицательной мнимой частью - $\frac{3\pi}{2}$.

У комплексно сопряженных чисел аргументы отличаются знаком (рис. 3).

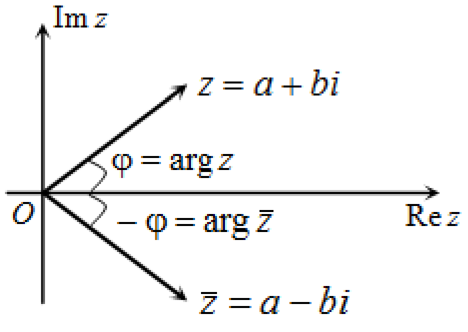


Рис. 3

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть задано комплексное число $z = a + bi$. Как известно, его можно изобразить на комплексной плоскости точкой, абсцисса которой равна действительной части этого числа, то есть a, а ордината - мнимой части b (рис. 1).

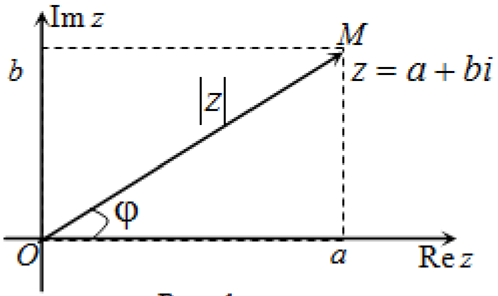


Рис. 1

Абсциссу a и ординату b комплексного числа $z = a + bi$ можно выразить через модуль $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент ϕследующим образом:

$a = |z| \cos\phi$, $b = |z| \sin\phi$

В данном случае ϕ и $|z|$ удовлетворяют соотношениям:

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi \in [0; 2\pi)$$

Тогда

$a = |z| \cos\phi$, $b = |z| \sin\phi$

$z = a + bi = |z| \cos\phi + i \cdot |z| \sin\phi = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$

Таким образом, для всякого комплексного числа $z = a + bi$ справедливо равенство

$$z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$$

которое называется **тригонометрической формой комплексного числа** z.

Задание. Комплексное число $z = -i$ представить в тригонометрической форме.

Решение. Для заданного числа действительная часть $a = 0$, а мнимая часть $b = -1$. Тогда модуль этого числа

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

а аргумент

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{0} = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Отсюда получаем, что

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

Ответ: $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

Вопросы для самостоятельного закрепления материала:

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Дайте определение мнимой единицы
3. Назовите натуральные числа.
4. Назовите рациональные числа
5. Назовите степени мнимой единицы
6. Какие комплексные числа называются равными
7. Какие комплексные числа называются сопряженными.
8. Какие комплексные числа называются противоположными
9. Как изображаются комплексные числа геометрически
10. Дайте определение модуля комплексного числа
11. Как найти аргументы комплексного числа
12. Перечислите формы записи комплексных чисел
13. Как выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.
14. Назовите число сопряженное комплексному числу Z= 2 - 3iи перемножив их дайте ответ
15. Чему равны корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.
16. Записать комплексное число в тригонометрической форме.
17. Представьте в тригонометрической форма число: - 2 – 2 i.
18. Записать формулу Муавра.
19. Как умножить комплексное число в тригонометрической форме?
20. Как извлечь корень из числа в тригонометрической форме?
21. Запишите комплексное число в показательной форме.
22. Представить в показательной форме число Z=-i+
23. Как умножить комплексные числа в показательной форме (записать формулу).
24. Как разделить комплексное число в показательной форме (записать формулу).
25. Как извлечь корень из числа в показательной форме?

Задания для практического занятия:

Задание 1

Вариант 1.

1. а. Построить в координатах xOy векторыZ_1 = 3 -j * 2

Z_2=-j

а) им противоположные

б) им сопряженные

2. Построить в координатах x Oy слагаемые и сумму комплексных чисел

Z_1 = 5+j ; Z_2 = - 1 +j * 3

3. Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов Z, = 3 ,Z_2 = -2 -j*3

Вариант 2

1. А) Построить в координатах xOy векторыZ_1 = 2 + j * 4; Z_2 = 3.5

а) им противоположные

б) им сопряженные

2. Построить в координатах x Oy слагаемые и сумму чиселZ_1 =2-j; Z_2 = - 3 -j * 4.

3. Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов Z, = -3 + j* 2 , Z_2 = -4 - j

Вариант 3

1. А) Построить в координатах xOy векторы Z_1 =-l+j* 2; Z_2=j* 4

а) им противоположные

б) им сопряженные

2. Построить в координатах x Oy слагаемые и сумму чиселZ_1 = -3 - j;
Z_2= 1 -j* 4.
3. Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов Z_1 = 3+j*2,Z_2= -1,5 - j* 2
Вариант 4
1. А) Построить в координатах xOy векторы Z_1 =-2-j *3;Z_2=3,5
а) им противоположные
б) им сопряженные
2. Построить в координатах x Oy слагаемые и сумму чиселZ_1 = -4 ;
Z_2 = 1 -j* 3.
3. Построить в координатах xOy уменьшаемое, вычитаемое и разность векторов Z_1=4—j ,Z_2= - 2 - j* 2
Задание 2
Вариант 1: выполнить действия:
1. (3 + i) + (-3-8i) + (5-4i) + (7 + 4i)
2. $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$
3. $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$
4. 4 + 2 i + (-1 + 6i) * (6 -i)
5. $\frac{1+3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1}$
Вариант 2: выполнитьдействия:
1. (1 -i) + (7-3i)-(2+i) + (6-2i)
2. i x i^2 x i^3 x i^4
3. $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$
4. (3-2i) x (5 + 4i) - 7i + 1
5. $\frac{1-i}{1+i} + \frac{3-2i}{1+3i}$
Вариант 3: выполнить действия:
1. (1 + i) + (2+3i) - (5+ 6i) + (7 - 6i)
2. I^6 +i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46} +i^{56}
3. $\frac{1}{i^{11}} + \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$
4. 4+ 5i + (5 + i) x(-2+ 3i)
5. $\frac{2-5i}{4+i} - \frac{6-7i}{4-i}$
Вариант 4: выполнить действия:
1. (4 + 9i) + (-4+i) - (3- 7i) + (-3 + 7i)
2. i^3 +i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43} +i^{53}
3. 2+i+ (5 +i) x (15+-3i)
4. $\frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^{56}}$
5. $\frac{2+i}{3-5i} - \frac{i}{i-1}$
Задание 3
Вариант 1
1. Решить квадратные уравнение x^2 - 4x + 5 = 0
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел 2xi+ 2yi+ 17 = 3x + 2y+ 18
3. Выполнить действия : а) (1 - i); б) i^{17} +i 1-i
Вариант 2
1. Составить квадратное уравнение по его корням:
X_1= 3 — i X_2 = 3 + i
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел : 4x + 5y - 9 + 7 (3x - y)i= 10x + 14yi
3. Выполнить действия

а)$\frac{3i}{2+i}$ б)$i^8(1-i)^3$

Вариант 3

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел 9 + 2xi + 4yi= 10i+ 5x - 6y
3. Выполнить действия : а) $(1 + i)^4$; б) $i+ i^{33}$

Вариант 4

1. Решить квадратное уравнение $x^2 +2x + 5 = 0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел 5x-2y + (x + y) i= 4 + 5i
3. Выполнить действия : а) (1 - i); б) $i^{42} - i^{23}$

Тест:

1. В каком квадратном уравнении корнями являются:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{5- \ \sqrt{3}}{2}$$

А) X^2-5x+7=0 Б)x^2+5x+7=0 С)x^2-10x+34=0

2. Выполнить действия:

$$\frac{2+\sqrt{3}*i^{41}}{5+\sqrt{3}*i^{19}} + \frac{(\sqrt{2}*i^{16})^2}{8*i^{102}}$$

А) $\frac{2+i\sqrt{3}}{4}$Б) i*$\sqrt{3}$ С) $\frac{i\sqrt{3}}{4}$

3. Чему равно комплексное число в алгебраической форме, если в тригонометрической

$$z = 8\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$$

A) z=4+4$\sqrt{3}$ В)$z = 4\sqrt{3} + 4i$ С) $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

4. Чему равно произведение (в показательной форме) комплексных чисел:

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \qquad z_2 = 2\sqrt{3}$$

$A)4\sqrt{3} * e^{\frac{2\pi}{3}}$;В) $4\sqrt{3} * e^{\frac{\pi}{12i}}$С) $4\sqrt{3}(cos\frac{2\pi}{3} + isino)$

Практическое занятие №4. Свойства корня натуральной степени из числа.

Цель:

– ознакомиться с понятием корня натуральной степени из числа, овладеть методикой выполнения действий над корнями натуральной степени из числа.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Корнем степени n из действительного числа a, где n - натуральное число, называется такое действительное число x, n-ая степень которого +

Корень степени n из числа a обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Согласно этому определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Нахождение корня n-ой степени из числа a называется извлечением корня. Число a называется подкоренным числом (выражением), n - показателем корня. При нечетном n существует корень n-ой степени для любого действительного числа a. При четном n существует корень n-ой степени только для неотрицательного числаa. Чтобы устранить двузначность корня n-ой степени из числа a, вводится понятие арифметического корня n-ой степени из числа a.

Понятие арифметического корня степени N

Если $a \geq 0$ и n - натуральное число, большее 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x, такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называется арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным числом, n - показателем корня.

Итак, согласно определению запись $\sqrt[n]{a} = x$, где $a \geq 0$, означает, во-первых, что $x \geq 0$ и, во-вторых, что $x^n = a$, т.е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем: пусть a - действительное число, а n - натуральное число, большее единицы, n-й степенью числа a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a, т.е. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. Число a - основание степени, n - показатель степени. Степень с нулевым показателем: полагают по определению, если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Нулевая степень числа 0 не имеет смысла. Степень с отрицательным целым показателем: полагают по определению, если $a \neq 0$ и n - натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Степень с дробным показателем: полагают по определению, если $a > 0$ и n - натуральное число, m - целое число, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Операции с корнями.

Во всех нижеприведенных формулах символ $\sqrt{}$ означает арифметический корень (подкоренное выражение положительно).

1. Корень из произведения нескольких сомножителей равен произведению корней из этих сомножителей:

$$\sqrt[n]{abc\ldots} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \ \ldots .$$

2. Корень из отношения равен отношению корней делимого и делителя:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} .$$

3. При возведении корня в степень достаточно возвести в эту степень подкоренное число: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. Если увеличить степень корня в n раз и одновременно возвести в n-ую степень подкоренное число, то значение корня не изменится: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

5. Если уменьшить степень корня в n раз и одновременно извлечь корень n-ой степени из подкоренного числа, то значение корня не изменится:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n:m]{\sqrt[m]{a}} .$$

Пример. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{8 \cdot 8} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[3 \cdot 2]{8^2} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Расширение понятия степени. До сих пор мы рассматривали степени только с натуральным показателем; но действия со степенями и корнями могут приводить также к отрицательным, нулевым и дробным показателям. Все эти показатели степеней требуют дополнительного определения.

Степень с отрицательным показателем. Степень некоторого числа с отрицательным (целым) показателем определяется как единица, делённая на степень того же числа с показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Теперь формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ может быть использована не только при m, большем, чем n, но и при m, меньшем, чем n.

Пример. $a^4 : a^7 = a^{4-7} = a^{-3}$.

Если мы хотим, чтобы формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ была справедлива при $m = n$, нам необходимо определение нулевой степени.

Степень с нулевым показателем. Степень любого ненулевого числа с нулевым показателем равна 1.

П р и м е р ы. $2^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $(-3/5)^0 = 1$.

Степень с дробным показателем. Для того, чтобы возвести действительное число a в степень m / n, нужно извлечь корень n–ой степени из m-ой степени этого числа a:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

П р и м е р. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

О выражениях, не имеющих смысла. Есть несколько таких выражений.

Случай 1.

$\frac{a}{0}$, где $a \neq 0$, не существует.

В самом деле, если предположить, что x – некоторое число, то в соответствии с определением операции деления имеем: $a = 0 \cdot x$, т.е. $a = 0$, что противоречит условию: $a \neq 0$

Случай 2.

$\frac{0}{0}$ - любое число.

В самом деле, если предположить, что это выражение равно некоторому числу x, то согласно определению операции деления имеем: $0 = 0 \cdot x$. Но это равенство имеет место при любом числе x, что и требовалось доказать.

Случай 3

Если считать, что правила действий со степенями распространяются и на степени с нулевым основанием, то 0^0 - любое число.

Действительно,

$$0^0 = 0^{3-3} = \frac{0^3}{0^3} = \frac{0}{0} = \textit{любое число}.$$

П р и м е р. Решить уравнение: $\frac{|x|}{x} = 1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим три основных случая:

1) $x = 0$ – это значение не удовлетворяет данному уравнению
2) при $x > 0$ получаем: $x / x = 1$, т.е. $1 = 1$, откуда следует, что x – любое число; но принимая во внимание, что внашем случае $x > 0$, ответом является $x > 0$;
3) при $x < 0$ получаем: $-x / x = 1$, т.е. $-1 = 1$, следовательно,

в этом случае нет решения. Таким образом, $x > 0$.

Задания для практического занятия:

Пример 1 .Вычислить $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Пример 2.Найти область определения $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x+3}$.

Пример 3.Из чисел $3\sqrt{2},\ \sqrt{15},\ 4,\ 5\sqrt{3}$ выберите наибольшее

Пример 4.Вычислить: $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

Пример 5.Упростить выражение: $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

Пример 6.Сократить дробь $\frac{64 - t}{8 - \sqrt{t}}$, если $\sqrt{t} \neq 8$.

Пример 7.Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A = \frac{1}{\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}$.

Пример 8.Упростите, исключив иррациональность знаменателя $\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(4 + \sqrt{15})}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Пример 9.Вычислить: $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$.

Пример 10.Упростить выражение: $(\sqrt{32} + \sqrt{45} - \sqrt{98})(\sqrt{72} - \sqrt{500} - \sqrt{8})$

Пример 11.Упростить выражение $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

Пример 12.Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

Пример 13.Упростить выражение $f(a,b) = \sqrt{\frac{a+b^2}{b} + 2\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{a+b^2}{b} - 2\sqrt{a}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$.

Практическое занятие №5, №6. Свойства степени с рациональными и действительными показателями.

Цель:

– ознакомиться с понятием степени с рациональными и действительными показателями, овладеть методикой выполнения действий со степенями с рациональными и действительными показателями.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Выражение a^n (степень с целым показателем) будет определено во всех случаях, за исключением случая, когда a = 0 и при этом n меньше либо равно нулю.

Свойства степеней

Основные свойства степеней с целым показателем:

$a^m * a^n = a^{(m+n)}$;

$a^m : a^n = a^{(m-n)}$ (при a неравномнулю);

$(a^m)^n = a^{(m*n)}$;

$(a*b)^n = a^n * b^n$;

$(a/b)^n = (a^n)/(b^n)$ (при b не равном нулю);

$a^1 = a$;

$a^0 = 1$ (при a не равном нулю);

Эти свойства будут справедливы для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n. Стоит отметить также следующее свойство:

Если m>n, то $a^m > a^n$, при a>1 и a^m

Можно обобщить понятие степени числа на случаи, когда в качестве показателя степени выступают рациональные числа. При этом хотелось бы, чтобы выполнялись все выше перечисленные свойства или хотя бы часть из них.

Например, при выполнении свойства $(a^m)^n = a^{(m*n)}$ выполнялось бы следующее равенство: $(a^{(m/n)})^n = a^m$.

Это равенство означает, что число $a^{(m/n)}$ должно являться корнем n-ой степени из числа a^m.

Степенью некоторого числа a (большего нуля) с рациональным показателем r = (m/n), где m – некоторое целое число, n – некоторое натурально число большее единицы, называется число n√(a^m). Исходя из определения: $a^{(m/n)}$ = n√(a^m).

Для всех положительных r будет определена степень числа нуль. По определению $0^r = 0$. Отметим также, что при любом целом, любых натуральных m и n, и положительном a верно следующее равенство: $a^{(m/n)} = a^{((mk)/(nk))}$.

Например: $134^{(3/4)} = 134^{(6/8)} = 134^{(9/12)}$.

Из определения степени с рациональным показателем напрямую следует тот факт, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r будет положительным.

Основные свойства степени с рациональным показателем

Для любых рациональных чисел p, q и любых a>0 и b>0 верны следующие равенства:

1. $(a^p)*(a^q) = a^{(p+q)}$;
2. $(a^p):(b^q) = a^{(p-q)}$;
3. $(a^p)^q = a^{(p*q)}$;
4. $(a*b)^p = (a^p)*(b^p)$;
5. $(a/b)^p = (a^p)/(b^p)$.

Данные свойства вытекают из свойств корней. Все данные свойства доказываются аналогичным способом, поэтому ограничимся доказательством только одного из них, например, первого $(a^p)*(a^q) = a^{(p + q)}$.

Пусть p = m/n, a q = k/l, где n, l - некоторые натуральные числа, а m, k – некоторые целые числа. Тогда нужно доказать, что:

$(a^{(m/n)})*(a^{(k/l)}) = a^{((m/n) + (k/l))}$.

Сначала приведем дроби m/n k/l к общему знаменателю. Получим дроби (m*l)/(n*l) и (k*n)/(n*l). Перепишем левую часть равенства с помощью этих обозначений и получим:

$(a^{(m/n)})*(a^{(k/l)}) = (a^{((m*l)/(n*l))})*(a^{((k*n)/(n*l))})$.

Далее, используя определение степени с рациональным показателем, свойства степени с целым показателем и свойства корня, получим:

$(a^{(m/n)})*(a^{(k/l)}) = (a^{((m*l)/(n*l))})*(a^{((k*n)/(n*l))}) = (n*l)\sqrt{}(a^{(m*l)})*(n*l)\sqrt{}(a^{(k*n)}) = (n*l)\sqrt{}(\ (a^{(m*l)})*(a^{(k*n)})) = (n*l)\sqrt{}(a^{(m*l+k*n)}) = a^{((m*l+k*n)/(n*l))} = a^{((m/n)+(k/l))}$.

То есть получили, что $(a^{(m/n)})*(a^{(k/l)}) = a^{((m/n)+(k/l))}$, что и требовалось доказать.

Задания для практического занятия:

Математический диктант: свойства степеней с рациональным (1 вариант) и действительными (2 вариант) показателями.

1 вариант

Вычислить:

1. $81^{3/4}$
2. $27^{-1/3}$
3. $2 \cdot 25^{-1/2}$
4. $2^{-1/3} \cdot 2^{-4/3}$
5. $4^{3} \cdot 8^{-2}$
6. $\dfrac{0{,}01}{10^{-3}}$

Упростить:

7. $a^{2/3} \cdot \sqrt[3]{a}$
8. $\dfrac{x^{1/3}}{x^{-2/3}}$

2 вариант

1. $64^{-1/3}$
2. $27^{2/3}$
3. $125^{4/3}$
4. $16^{2} \cdot 2^{-6}$
5. $3^{1/4} \cdot 3^{-5/4}$
6. $\dfrac{0{,}001}{10^{-5}}$
7. $a^{5/4} : \sqrt[4]{a}$
8. $a^{-1/2}\sqrt{a^3}$

Практическое занятие №7. Свойства логарифмов. Основное логарифмическое тождество.
Цель:

– ознакомиться с понятием логарифма числа, десятичного и натурального логарифмов и их свойствами, овладеть методикой нахождения значений логарифмов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. b > 0, a > 0, a≠ 1.

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $\log_a a^x = x$

Пример:

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$
$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$
$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как $\lg$.
$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$

Натуральный логарифм — логарифм с основанием e, обозначается $\ln$

Свойства логарифма

$a^{\log_a b} = b$	$\log_a b^m = m \log_a b$	
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_{a^n} b^n = \log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$
$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3 (8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Логарифм частного — это разность логарифмов

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$, в частности если m = n, мы получаем формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

Задания для практического занятия:

Вычислить:

1 вариант	2 вариант
1. $\log_3 81$	1. $\log_2 \frac{1}{8}$
2. $\log_{1/2} 4$	1. $\log_2 64$
3. $\log_{0,5} \frac{1}{2}$	3. $\log_{0,2} 125$
4. $\log_4 \frac{1}{16}$	4. $\log_3 \frac{1}{27}$
5. $3^{5\log_3 2}$	5. $5^{\log_5 16}$
6. $10^{\lg 2}$	6. $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$
7. $8^{\log_2 5}$	7. $9^{\log_3 12}$
Решить уравнение:	
8. $\log_6 x = 3$	8. $\log_5 x = 4$

Практическое занятие №8. Правила действия с логарифмами.
Цель:

– ознакомиться с понятием логарифма числа, десятичного и натурального логарифмов и их свойствами, овладеть методикой выполнения действий над логарифмами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. **b > 0, a > 0, a≠ 1.**

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $\log_a a^x = x$

Пример:

$$\log_2 8 = 3,\ \text{так как } 2^3 = 8;$$
$$\log_7 49 = 2,\ \text{так как } 7^2 = 49;$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = -1,\ \text{так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$
$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2},\ \text{так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как $\lg$.
$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$

Натуральный логарифм — логарифм с основанием e, обозначается $\ln$

Свойства логарифма

$a^{\log_a b} = b$	$\log_a b^m = m \log_a b$	
$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_{a^n} b^n = \log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$
$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3 (8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Логарифм частного — это разность логарифмов

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$, в частности если m = n, мы получаем формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

Задания для практического занятия:

1 вариант

Вычислить:

1. $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$
2. $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$
3. $\log_{1/3} 54 - \log_{1/3} 2$
4. $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$
5. $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$

6. $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16}$

Прологарифмировать по основанию 10

7. $x = \frac{a^2 b}{10}$

2 вариант

1. $\log_{14} 7 + \log_{14} 2$
2. $\log_3 5 - \log_3 \frac{5}{9}$
3. $\log_{1/3} 48 - \log_{1/3} 16$
4. $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$
5. $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$

6. $\dfrac{\log_5 27}{\log_5 9}$

7. $x = \frac{10a^3 b}{c}$

Практическое занятие №9. Правила действия с логарифмами.
Цель:
− ознакомиться с понятием логарифма числа, десятичного и натурального логарифмов и их свойствами, овладеть методикой выполнения действий над логарифмами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. **b > 0, a > 0, a≠ 1.**
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $\log_a a^x = x$

Пример:
$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$
$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$
$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как $\lg$.
$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$
Натуральный логарифм — логарифм с основанием e, обозначается $\ln$
Свойства логарифма

$a^{\log_a b} = b$	$\log_a b^m = m \log_a b$	
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_{a^n} b^n = \log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Основное логарифмическое тождество
$$a^{\log_a b} = b$$
$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$
Логарифм произведения — это сумма логарифмов
$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$
Логарифм частного — это разность логарифмов
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$$
Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$, в частности если m = n, мы получаем формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

Задания для практического занятия:

1) Найдите значение выражения $36^{\log_6 5}$.
2) Найдите значение выражения log4 8.
3) Найдите значение выражения $\log_5 0{,}2 + \log_{0{,}5} 4$
4) Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$.
5) Найдите значение выражения: $6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$.
6) Найдите значение выражения $\log_{0{,}8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$.
7) Найдите значение выражения: $5^{\log_{25} 49}$
8) Вычислите значение выражения: $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$
9) Найдите значение выражения loga(ab3), если logb a = 1/7.
10) Найдитеloga(a2b3), еслиloga b = –2.
11) Най-ди-те loga(a7:b3), если logab = 10.
12) Вычислить: $2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5} - 7^{\log_{343}(7,25)^3} + 3^{4\log_9 2,5}$
13) Вычислить: $\dfrac{\log_6 30}{\log_{30} 6} - \dfrac{\log_6 180}{\log_5 6}$
14) Найдите значение выражения (log216)·(log5125).
15) 26848. Найдите значение выражения $\log_5 60 - \log_5 12$
16) 26859. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0{,}2$
17) 26889. Найдите значение выражения $\log_4 \log_5 25$

Практическое занятие №10. Преобразование рациональных, иррациональных и степенных выражений.

Цель:

– ознакомиться с методами преобразований рациональных, иррациональных и степенных выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию рациональных, иррациональных и степенных выражений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Преобразование рациональных и иррациональных выражений.

Выражениями в алгебре называют записи, состоящие из чисел и букв, соединенных знаками действий.

$\frac{3x}{4x+1}$; a^2-b^2+c; $\sqrt{x-2}+9$; x^n – алгебраические выражения.

В зависимости от операций различают рациональные и иррациональные выражения.

Алгебраические выражения называют рациональными, если относительно входящих в него букв a, b, c, … не выполняется никаких других операций, кроме операций сложения, умножения, вычитания, деления и возведения в целую степень.

Алгебраические выражения, содержащие операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называются иррациональными относительно этой переменной.

Тождественным преобразованием данного выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве.

В основе тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений лежат следующие теоретические факты.

1. Свойства степеней с целым показателем:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - множителей}}$, $n \in N$; $a^1=a$;

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $n \in N$, $a \neq 0$; $a^0=1$, $a \neq 0$;

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \neq 0$;

$a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$;

$(a^n)^m = a^{nm}$, $a \neq 0$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

$(ab)^m = a^m b^m$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

2. Формулы сокращенного умножения:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

где a, b, c – любые действительные числа;

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $a \neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

3. Основное свойство дроби и действия над дробями:

$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$;

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$; $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}$;

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

4. Определение арифметического корня и его свойства:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$; $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$;

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; $\quad \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$; $\quad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$,

где a, b – неотрицательные числа, $n\in$N, $n\geq 2$, $m\in$N, $m\geq 2$.

2) Преобразование степенных выражений.

Свойства степени с рациональным показателем.

Арифметическим корнем n-й степени $(n\in N;\ n\geq 2)$ из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a,\ n\in N$
- $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,\ n\in N$
- $\sqrt[nk]{a^{mn}}=\sqrt[k]{a^m}$ при $a\geq 0$

Степень с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, где $m\in Z$, $n\in N$, $a>0$,

если $\frac{m}{n}>0$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0$.

- $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$ при $a>0$, p и q – рациональные числа
- $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ при $a>0$, p и q – рациональные числа
- $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$ при $a>0$, p и q – рациональные числа
- $(ab)^p=a^p\cdot b^p$ при $a>0,\ b>0$, p– рациональное число
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$ при $a>0,\ b>0$, p– рациональное число

2.2. Примеры с решениями.

1) Вычислите $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$.

Решение: преобразуем данное числовое выражение, используя свойства корня n-й степени, получим $\sqrt{3\cdot 27}\cdot\sqrt[3]{-3\cdot 9}-\sqrt[5]{-\frac{2}{64}}=\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{-27}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=9\cdot(-3)+\frac{1}{2}=-26{,}5$.

Ответ: –26,5.

2) Найдите значение выражения $\cdot\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}$.

Решение: проведем преобразования следующим образом: $\cdot\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}=$

$=\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}=\sqrt[5]{(6-2\sqrt{17})(6+2\sqrt{17})}=\sqrt[5]{36-68}=\sqrt[5]{-32}=-2$.

Ответ: –2.

3) Упростите выражение $\frac{c\cdot c^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{c^4}}$.

Решение: $\dfrac{c\cdot c^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{c^4}}=\dfrac{c\cdot c^{-\frac{1}{5}}}{c^{\frac{4}{5}}}=c^{1-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}=c^0=1$.

Ответ: 1.

4) Укажите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}{\sqrt{2c}+\sqrt{d}}-\dfrac{\sqrt{2c}+\sqrt{d}}{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{d}{2c}}-\sqrt{\dfrac{2c}{d}}\right)$, если *c*> 0, *d*> 0; $2ñ\neq d$.

Решение: преобразуем выражение по действиям:

1. $\dfrac{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}{\sqrt{2c}+\sqrt{d}}-\dfrac{\sqrt{2c}+\sqrt{d}}{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}=\dfrac{(\sqrt{2c}-\sqrt{d})^2-(\sqrt{2c}+\sqrt{d})^2}{(\sqrt{2c}+\sqrt{d})(\sqrt{2c}-\sqrt{d})}=$

$=\dfrac{2c+d-2\sqrt{2c}\cdot\sqrt{d}-2c-d-2\sqrt{2c}\cdot\sqrt{d}}{2c-d}=\dfrac{-2\sqrt{2cd}}{2c-d}$.

2. $\sqrt{\dfrac{d}{2c}}-\sqrt{\dfrac{2c}{d}}=\dfrac{d-2c}{\sqrt{2cd}}$.

3. $\dfrac{-2\sqrt{2cd}}{2c-d}\cdot\dfrac{d-2c}{\sqrt{2cd}}=\dfrac{2\sqrt{2cd}\cdot(d-2c)}{(d-2c)\cdot\sqrt{2cd}}=2$.

Ответ: 2

5) Упростите выражение $125^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{2}}-5\cdot49^{\frac{1}{2}}$.

Решение: $125^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{2}}-5\cdot49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5^3}+2\sqrt{5}-5\cdot7=5\sqrt{5}+2\sqrt{5}-35=7\sqrt{5}-35$.

Ответ: $7\sqrt{5}-35$.

6) Внесите множитель под знак корня $b\sqrt[4]{-b}$.

Решение: Заметим, что по определению корня: $-b\geq0$, то есть $b\leq0$, поэтому получим $-(-b)\sqrt[4]{-b}=-\sqrt[4]{(-b)^4}\cdot\sqrt[4]{-b}=-\sqrt[4]{-b^5}$.

Ответ: $-\sqrt[4]{-b^5}$.

7) Найдите значение выражения $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}+\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3}{a-b-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$ при всех допустимых значениях переменных.

Решение: проведем преобразование по действиям

1. $a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}=a+b+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)=$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)=$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

2. $a-b-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

3. $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}+\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{2\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=2.$$

Ответ: 2.

8) Упростите выражение $\sqrt{a^2+2+2\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}$.

Решение: преобразуем $\sqrt{a^2+2+2\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}=$

$$=\sqrt{a^2+1+2\sqrt{a^2+1}+1}-\sqrt{a^2+1-2\sqrt{a^2+1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2}=$$

$$=\left|\sqrt{a^2+1}+1\right|-\left|\sqrt{a^2+1}-1\right|=\sqrt{a^2+1}+1-\sqrt{a^2+1}+1=2.$$

Ответ: 2.

Задания для практического занятия:

Отметьте номер правильного ответа:

1. Результат упрощения выражения $\dfrac{(x-y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+x\sqrt{y}+\sqrt{xy}}{x+y-\sqrt{xy}}$ имеет вид

1) $\sqrt{y}-\sqrt{x}$; 2) $x+\sqrt{xy}$; 3) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. 5) $x-y$;

2. Значение выражения $\dfrac{\sqrt{31+10\sqrt{6}}}{20+4\sqrt{6}}$ равно

1) 4; 2) $\sqrt{2}$; 2) 0,25;

3) $10-5\sqrt{6}$; 4) 6.

Докажите справедливость равенства:

3. $\dfrac{9}{(b-3)(c-3)}-\dfrac{b^2}{(b-c)(3-b)}-\dfrac{c^2}{(3-c)(c-b)}=1$

4. $\left(\left(\dfrac{a^{1/2}+b}{a^{2/3}-b^3}\right)^{-1}\cdot\dfrac{a-b^2}{a+b\sqrt{a}+b^2}\right)^{1/2}-\sqrt{a}=-b$, если $\sqrt{a}>b$.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$; 6. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-3}$.

Вычислите значение выражения:

7. $\dfrac{a^2-3b^2}{2a^2+5ab+3b^2}$, если $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{2}{3}$;

8. $2b^3+3b^2+\dfrac{3}{b^2}-\dfrac{2}{b^3}$, если $b-\dfrac{1}{b}=3$;

9. $\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

Упростите выражения:

10. $\frac{1}{(a-3)(a-b)}+\frac{1}{(3-b)(3-a)}+\frac{1}{(b-a)(b-3)}$;

11. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$;

12. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\left(x^{1/4}-y^{1/4}\right)^{-1}+\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^{-1}\right)^{-2}$;

13. В пустое место вставьте недостающее слагаемое, чтобы получился квадрат суммы или разности двух чисел.

1) $x^2 + 2x +$ 4) $a^2 -\quad + 6{,}25$

2) $4a^2 + a +$ 5) $c^2 + 8c +$

3) $x^2 - 6x +$ 6) $9\,\boldsymbol{y}^2 -\quad + \frac{1}{4}x^2$

14. Разложите на множители

1) $x^2 + 2px + p^2$3) $16x^2 - 8xy + y^2$5) $x^2y^2 + 1 + 2xy$

2) $- 4x^2 + 4x – 1$4)$- 3a^2 + 30a – 75$6) $a^4 - c^4 + c^2 - a^2$

15. Сократите дроби.

1) $\frac{3a^2-27a}{a^3+3a}=$ 2) $\frac{2a^2-8}{a^2+4a+4}$

3) $\frac{25x^2-x^4}{(5-x)^2}=$ 4) $\frac{3x^5-3x^2}{x^2+x+1}=$

16. Найдите числовое значение алгебраического выражения:

$\frac{2a+2c}{2a^2-2c^2}$ *при* $a=\frac{1}{2}$ *и* $c=\frac{1}{3}$.

17. Упростите выражения.

1) $\left(\frac{x}{y-x}-\frac{x}{y+x}\right)\bullet\frac{(x+y)^2}{2x^2}=$ 2) $\left(\frac{1}{a-1}-1-\frac{1}{a+1}\right)\bullet\left(a^2-1\right)=$

3) $\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)\bullet\frac{ac}{a-c}=$ 4) $\sqrt[3]{x^{-3}}=$

5) $\left(\sqrt[4]{y^{-4}}\right)^2=$ 6) $\sqrt[3]{\frac{a^3x^3}{x^{-6}y^3}}\bullet\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}=$

18. Представьте в виде степени числа ***c*** выражения :

1) $c^2\ \ c^3 c^{-2} c^3 : c^4$

2) $(c\,c^2)^3$

3) $(c^4 : c^3)\,c$

4) $c^5 : (c^2 : c)$

5) $1 : c^5$

6) $c^{-2} c^3 : c^4$

7) $(c^2 c^4 c^6)(c^{-3} : c)$

8) $(c^{-1} c^{-3})^{-1}$
9) $(c^{2})^{-2}$
10) $c^{6} c^{6}$

19. Представьте число в виде : $c \bullet \sqrt[n]{a}$, где n , a - натуральные числа.

1) $\left(\sqrt{5}\right)^{3} =$ 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} =$

3) $\sqrt[3]{24 \cdot 729} =$ 4) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} =$

20. Упростите выражение.

1) $\sqrt{4a^{2}}$ 2) $\sqrt[3]{8c^{3}a^{3}}$ 3) $\sqrt[6]{\dfrac{64\square^{12}}{729-^{6}}}$

4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16x^{4}y^{8}}}$ 5) $\sqrt[5]{\dfrac{x^{10}c^{5}}{y}}$

21. Вычислите, пользуясь свойствами степени.

1) $2^{2}\ 2^{3}$5) $(2^{2})^{2}$9) $\dfrac{2^{3}+2^{-3}}{4^{3}+1}$

2) $3^{3} : 3^{6}$6) $(-4)2^{4}$10) $\dfrac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{(-9)^{9}}$ $\dfrac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{(-9)^{9}}$

3) $8\ 2^{-4}$7) $(8\ 2^{-4})^{-1}$11) $\dfrac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{12}}$

4) $(-4)^{-2} : 4^{-4}$ 8) $(5^{-4})(5^{-4})^{-2}$ 12) $(-2)^{3} + 2^{2} + (-1)^{10}$

22. Упростить выражение:

1) $\dfrac{5a}{28в^{2}} \cdot 8aв \cdot \dfrac{7в}{5a^{3}}$ 2) $\dfrac{a^{3}+в^{3}}{a^{2}в-в^{3}} : \dfrac{a^{2}+aв}{a^{2}-в^{2}}$

3) $\dfrac{a^{3}-8}{a+2} \cdot \dfrac{a^{2}-4}{a^{2}+2a+4}$ 4) $\dfrac{42}{a^{2}-9} + \dfrac{8}{2a+3} + \dfrac{7}{3-2a}$

5) $\left(\dfrac{xy}{x^{2}-y^{2}} - \dfrac{y}{2x-2y}\right) : \dfrac{3y}{x^{2}-y^{2}}$ 6) $\left(\dfrac{2a+1}{2a-1} - \dfrac{2a-1}{2a+1}\right) \cdot \dfrac{10a-5}{4a}$

7) $\left(1-\dfrac{1}{a+в}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a+в}\right)-1$ 8) $\left(a-в+\dfrac{4aв}{a-в}\right) : \left(a+в-\dfrac{4aв}{a+в}\right)$

9) $\dfrac{40-10a-5a^{2}}{a-2} + \dfrac{a^{3}+8}{a^{2}-2a+4}\cdot 8$ 10) $\left(a-2в-\dfrac{a^{2}-в^{2}}{a+в}\right) : \left(2a-в+\dfrac{a^{2}-в^{2}}{a-в}\right)$

23. Сократитьдроби:

1) $\dfrac{3x^{2}-2x-8}{2x^{2}-3x-2}$ 2) $\dfrac{x^{2}-4x-12}{x-2}$

3) $\dfrac{2x^{2}+x-3}{2x^{2}+7x+6}$ 4) $\dfrac{x^{3}-9x}{x+3}$

5) $\dfrac{x+3}{x^2-6x-27}$ 6) $\dfrac{x^3-1}{2x^2-5x+3}$

7) $\dfrac{x^2+x-2x}{x-1}$ 8) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$

9) $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$ 10) $\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+x}$

Практическое занятие №11. Преобразование показательных и логарифмических выражений.
Цель занятия:

− ознакомиться с методами преобразований показательных и логарифмических выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию показательных и логарифмических выражений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Логарифмом положительного числа x по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получилось число x: $a^{\log_a x}=x$.

Равенство $\log_a x=y$ означает, что $a^y=x$.

Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$\log_a 1=0,$

$\log_a a=1.$

Если основание логарифма равно числу e, то логарифм называют натуральным. Для него принята запись $\ln x$.

Справедливы равенства:

$\ln 1=0;$

$\ln e=1;$

$e^{\ln x}=x\ \ (x>0).$

Если основание логарифма равно 10, то логарифм называют десятичным. Для него принята запись $\lg x$.

Справедливы равенства:

$\lg 1=0;$

$\lg 10=1;$

$10^{\lg x}=x\ \ (x>0).$

Основные свойства логарифмов

Если числа a, b положительны и отличны от единицы ($M, N>0$), то справедливы следующие соотношения:

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a M^p = p \log_a M,$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

$$\log_b a \cdot \log_a N = \log_b N,$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_{a^k} N = \frac{1}{k} \log_a N \qquad (k \neq 0),$$

$$\log_{a^k} N^k = \log_a N \qquad (k \neq 0),$$

$$\frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M} \qquad (M \neq 1),$$

$$\log_a N \cdot \log_b M = \log_a M \cdot \log_b N,$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

Упрощение выражений

Пример 1. Вычислить значение выражения $16^{\log_{81} 3 + \log_2 \sqrt[4]{3}}$.

Решение. $16^{\log_{81} 3 + \log_2 \sqrt[4]{3}} = 16^{\log_{3^4} 3} \cdot \left(2^4\right)^{\frac{1}{4} \log_2 3} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6

Пример 2. Вычислите значение выражения $\frac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \frac{5\log_2 9}{\log_{64} 2}$.

Решение. Так как $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$, $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$, то

$$\frac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \frac{5\log_2 9}{\log_{64} 2} = 30\log_2 18 - 30\log_2 9 = 30\log_2 \frac{18}{9} = 30\log_2 2 = 30.$$

Ответ: 30.

Задания для практического занятия:

1. Решить уравнения
2. $\log_8(x+7) = \log_8(2x-15)$
3. $\log_2(14-2x) = 4\ \log_2 3$
4. $\log_{0,5}(3x+0,5) + \log_{0,5}(x-2) = -2$
5. $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$. Запишите сумму квадратов корней.
6. Найдите сумму корней уравнения: $(x+2)\log_4(x-3) = 0$
7. Найдите произведение корней уравнения:
8. $5^{\log_{25} 9} = \log_2(x^2 + 2x)$
9. Сколько корней имеет уравнение:
10. $\log_2 x + \log_2(x+5) - \log_5(7-x) = 0$
11. Найдите произведение корней уравнения:

i. $\frac{5}{\log_2(x+3)} + \frac{4}{\log_2 x} = 3$

12. Найдите среднее арифметическое корней уравнения:
13. $(x^2 - 49)\log_5(6-x) = 0$
14. Найдите наибольший корень уравнения:

15. $2\log_9^2 = 2 - 3\log_9 x$.

Практическое занятие №12. Основные тригонометрические тождества. Преобразование простейших тригонометрических выражений.

Цель занятия:

− ознакомиться с основными тригонометрическими тождествами и методами преобразований простейших тригонометрических выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию простейших тригонометрических выражений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Основные тригонометрические тождества

$$1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2)\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$3)\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$4)\ tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$5)\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$$

$$6)\ \frac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$$

Четность, нечетность тригонометрических функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Косинус является четной функцией; синус, тангенс, котангенс -нечетные.
Формулы приведения

Это соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \pi\pm\alpha;\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha;\ 2\pi\pm\alpha$ и др., выражаются через значения $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha\ и\ ctg\alpha$.

Правила преобразования:

1) Если аргумент содержит $n\cdot\frac{\pi}{2}$, где n – нечетное натуральное число $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\ и\ т.д.\right)$, то функция меняется на "конфункцию", т.е. синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Если n - четное натуральное число $\left(\pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi\ и\ т.д.\right)$, то название функции не изменяется.

2) Определяем знак ("+" или "-") значения первоначальной функции. Преобразованное выражение сохраняет знак своего родителя.

Пример 1:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ *располагается в III четверти, косинус отрицательный*

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

Пример 2:

$$\sin\left(2\pi+\alpha\right)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $\left(2\pi+\alpha\right)$ *располагается в I четверти, синус положительный*

$$\sin\left(2\pi+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Пример 3:

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$ *располагается в IV четверти, тангенс отрицательный*

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-ctg\,2\alpha$$

Пример 4:

$$ctg\left(5\pi+\alpha\right)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $\left(5\pi+\alpha\right)$ *располагается в III четверти, котангенс положительный*

$$ctg\left(5\pi+\alpha\right)=ctg\,\alpha$$

Формулы сложения и вычитания

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

5) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

6) $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

7) $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$

8) $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Формулы двойного угла

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$
$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3) $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

4) $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

$$1)\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2)\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5)\ tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$6)\ ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Формулы половинного аргумента

$$1)\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$2)\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$3)\ tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$4)\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$5)\ ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$6)\ ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Задания для практического занятия:

1.Вычислить значение sin α, если cos α = 0,3, α — угол в первой четверти.

2.Вычислите значение tg α, если ctg α = 0,2.

3.Упростите выражения:

1) $\sin 20^0\cos 40^0+\cos 20^0\sin 40^0$;2) $\sin 45^0\cos 15^0-\cos 45^0\sin 15^0$;3) $\cos 12^0\cos 18^0-\sin 12^0\sin 18^0$;4) $\cos 98^0\cos 8^0+\sin 98^0\sin 8^0$;5) $\dfrac{tg\,22^0+tg\,23^0}{1-tg\,22^0 tg\,23^0}$;6) $\dfrac{tg\,45^0-tg\,15^0}{1+tg\,15^0 tg\,45^0}$.

4.Вычислите:

1) $\sin 10\pi$;2) $tg\dfrac{41\pi}{4}$;3) $\sin 75^0$;4) $\cos 105^0$;5) $2\sqrt{2}\cos 15^0$.

5.Известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}3$. Найти:1) $\sin^2\alpha$;2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;3) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

6.Найти tg α, если $\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=5.$

7.Вычислить cos α, если cos2α = 3/4 и $\dfrac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi.$

8.Найти значение выражения: $\dfrac{\sin^3 19^\circ-\cos^3 19^\circ}{\sin 19^\circ-\cos 19^\circ}-\dfrac{\sin^2 57^\circ+\sin^2 33^\circ}{tg 19^\circ+ctg 19^\circ}$

9.Вычислить sin10º sin30º sin50º sin70º .

10.Упростить выражение: $\dfrac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha-tg^2\alpha}$.

11.Доказать тождество при $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-\dfrac{2}{\cos\alpha}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}.$

12.Найти значение следующих тригонометрических выражений: sin 2α, cos 2α, tg 2α, если $\sin\alpha=\dfrac{4}{5};\ 0<\alpha<\pi$.

13.Доказать тождество $\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1$.

14.Вычислить значение выражения: $\sin\dfrac{8\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{11\pi}{6}+\cos\dfrac{29\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{23\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{11\pi}{6}}+7$.

15.Вычислить cos(4arctg 5).

16.Выразить через все обратные функции $\arcsin\left(-\dfrac{2}{3}\right).$

17.Найти arcsin (sin 12).

18.Вычислить $\sin\left(\arccos\dfrac{12}{13}-arctg\,7\right).$

19. Вычислите остальные тригонометрические функции, если известно: $tg\alpha=2$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$

20.Упростить выражение: $(\sin x-\cos x)^2+(\cos x+\sin x)^2-2$

21. Выразите в радианах углы: $390^\circ, 405^\circ, -720^\circ$

22. Приведите к тригонометрической функции острого угла: $\cos(-1560^\circ)$, $\sin(1560^\circ)$

23. Упростите выражение: $\dfrac{\cos(\alpha-90°)}{\sin(180°-\alpha)}+\dfrac{tg(\alpha-180°)\cdot\cos(180°+\alpha)}{tg(270°+\alpha)}$

24. Найдите значение выражения: а) $\sin 63°\cos 27°+\cos 63°\sin 27°$,

б) $\sin 51°\cos 21°-\cos 51°\sin 21°$, в) $\cos(x-y)$, если $\sin x=\dfrac{8}{17},\cos y=\dfrac{4}{5},\ 0<x<90\ ,0<y<90°$

25. Упростите выражение:а) $\dfrac{\sin 40°}{2\cos 20°}$, б) $\dfrac{\sin^2 18°+\cos 36°}{\cos^2 18°}$, *в) $\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}$

26. Найдите: $\sin 2\alpha,\cos 2\alpha,ctg2\alpha,$ если $\cos\alpha=-0{,}6\ \pi\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{2}$

27. Представьте в виде произведения: а) $\cos 2x+\cos 3x$, б) $\sin x-\sin 3x$

28. Найдите: $\sin\dfrac{\alpha}{2},\cos\dfrac{\alpha}{2},tg\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0{,}8\ \ 0\le\alpha\le 90°$

Практическое занятие №13. Формулы приведения. Преобразование тригонометрических выражений.

Цель:

– ознакомиться с основными формулами приведения и методами преобразований тригонометрических выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию тригонометрических выражений с применением формул приведения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

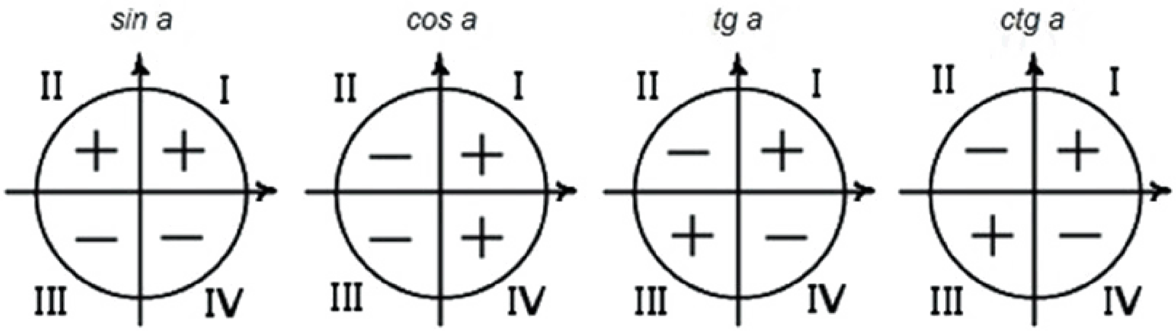
$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

угол альфа лежит пределах от 0 до 90 градусов

1. Определите знак функции в соответствующей четверти.

Напомню их:



2. Запомните следующее:

при 90° и 270°

функция изменяется на кофункцию

при 180° и 360°

функция на кофункцию не изменяется

Что означает понятие — функция изменяется на кофункцию?

Ответ: синус меняется на косинус или наоборот, тангенс на котангенс или наоборот.

Теперь по представленному закону запишем несколько формул приведения самостоятельно:

$$\cos(180°+\alpha)$$

Данный угол лежит в третьей четверти, косинус в третьей четверти отрицателен. Функцию на кофункцию не меняем, так как у нас 180 градусов, значит:

$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$ Верно $\cos(270°-\alpha)$ Угол лежит в третьей четверти, косинус в третьей четверти отрицателен. Меняем функцию на кофункцию, так как у нас 270 градусов, значит:

$\cos(270°-\alpha) = -\sin\alpha$ Верно

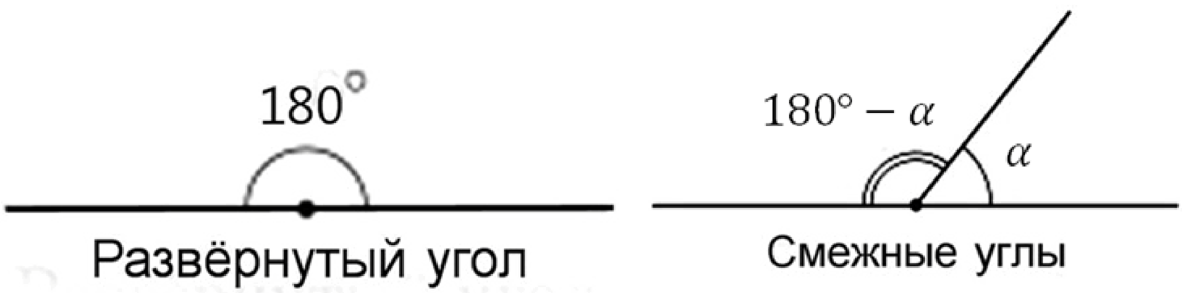
$$\sin(360°+\alpha)$$

Угол лежит в первой четверти, синус в первой четверти положителен. Не меняем функцию на кофункцию, так как у нас 360 градусов, значит:

$\sin(360°+\alpha) = \sin\alpha$ Верно

Вот вам ещё дополнительное подтверждение того, что синусы смежных углов равны:

Рассмотрим углы: $180°-\alpha$ и α — они смежные



$$\sin(180^\circ - \alpha)$$

Угол лежит во второй четверти, синус во второй четверти положителен. Не меняем функцию на кофункцию, так как у нас 180 градусов, значит:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{Верно}$$

Основные тригонометрические тождества

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ 2)\ tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ 3)\ ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ 4)\ tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \\ 5)\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 \\ 6)\ \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1 \end{array}}$$

Четность, нечетность тригонометрических функций

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ tg(-\alpha) = -tg\alpha \\ ctg(-\alpha) = -ctg\alpha \end{array}}$$

Косинус является четной функцией; синус, тангенс, котангенс -нечетные.

Формулы приведения

Это соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha;\ \pi \pm \alpha;\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha;\ 2\pi \pm \alpha$ и др., выражаются через значения $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha\ и\ ctg\alpha$.

Правила преобразования:

1) Если аргумент содержит $n \cdot \frac{\pi}{2}$, гдеn – нечетное натуральное число $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\ и\ т.д.\right)$, то функция меняется на "конфункцию", т.е. синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Если n - четное натуральное число $(\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\ и\ т.д.)$, то название функции не изменяется.

2) Определяем знак ("+" или "-") значения первоначальной функции. Преобразованное выражение сохраняет знак своего родителя.

Пример 1:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ *располагается в III четверти, косинус отрицательный*

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

Пример 2:

$$\sin(2\pi+\alpha)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $(2\pi+\alpha)$ *располагается в I четверти, синус положительный*

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

Пример 3:

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$ *располагается в IV четверти, тангенс отрицательный*

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-ctg\,2\alpha$$

Пример 4:

$$ctg(5\pi+\alpha)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $(5\pi+\alpha)$ *располагается в III четверти, котангенс положительный*

$$ctg(5\pi+\alpha)=ctg\,\alpha$$

Формулы сложения и вычитания

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

5) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

6) $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

7) $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$

8) $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Формулы двойного угла

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$

$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3) $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

4) $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

$$1)\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2)\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5)\ tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$6)\ ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Формулы половинного аргумента

$$1)\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$2)\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$3)\ tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$4)\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$5)\ ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$6)\ ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Задания для практического занятия:

1) Приведите тригонометрические функции к аргументу α.

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

cos (π - α)	sin (π - α)
sin (2π - α)	cos (2π + α)
cos ($\frac{3\pi}{2}$+ α)	sin ($\frac{3\pi}{2}-$ α)
sin (π + α)	cos (π + α)
tg ($\frac{\pi}{2}-$ α)	ctg ($\frac{\pi}{2}-$α)
ctg (π - α)	tg (2π - α)
tg (α – π)	ctg (α – 2π)

2) Вычислить:

$\cos 105^\circ; \quad \sin\frac{13}{12}\pi; \quad tg 15^\circ; \quad ctg\frac{5}{12}\pi$

3. Упростить:

$$A = \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}\right)^2}$$

4. Доказать тождество:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (in\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

5. Дано $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{5}$. Найти $\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad tg\alpha, \quad ctg\alpha$.

6. Получить выражение $tg3\alpha$ через $tg\alpha$.

7. Доказать тождество

$$tg\alpha + 2tg2\alpha + 4tg4\alpha + 8tg8\alpha + 16ctg16\alpha = cg\alpha$$

8.Вычислить: $A = \cos 80^\circ \sin 50^\circ \cos 20^\circ$.

9.Доказать тождество:

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)si\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Практическое занятие №14. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

Цель:

- с основными формулами выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента и методами преобразований тригонометрических выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию тригонометрических выражений с применением формул приведения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Формулы сложения аргументов

Синус суммы двух чисел равен сумме произведений синуса первого числа на косинус второго и косинуса первого числа на синус второго:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

Доказательство строится с использованием формул приведения:

$$\sin(x+y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y=$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$, что и требовалось доказать.

Синус разности двух чисел равен разности произведений синуса первого числа на косинус второго и косинуса первого числа на синус второго:

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

Доказательство опирается на четность косинуса и нечетность синуса:

$$\sin(x-y)=\sin(x+(-y))=$$

$$=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=$$

$$=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$, что и требовалось доказать.

Косинус разности двух чисел равен сумме произведений косинусов и произведения синусов данных чисел:

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

Косинус суммы двух чисел равен разности произведения косинусов и произведения синусов данных чисел

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

Доказательство опирается на четность косинуса и нечетность синуса:

$$\cos(x+y)=\cos(x-(-y))=$$

$$=\cos x\cos(-y)+\sin x\sin(-y)=$$

$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$, что и требовалось доказать.

Тангенс суммы (разности)

Если числа x, y и x±y входят в область определения тангенса, то тангенс суммы (разности) чисел x и y равен сумме (разности) тангенсов этих чисел, деленной на единицу минус (плюс) произведение тангенсов этих чисел:

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$, если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x\pm y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} \pm \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \mp \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

что и требовалось доказать.

Формулы двойного аргумента

Положив в формулах синуса суммы, косинуса суммы и тангенса суммы $y = x$, получим формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$ где $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$

Заметим, что формула косинуса двойного угла имеет два разных продолжения, так как в ней можно выразить $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$, а можно выразить $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Формулы половинного аргумента

Формула синуса половинного аргумента

Среди формул двойного аргумента для синуса и косинуса есть такие, в которых участвуют всего два выражения. Это формулы косинуса двойного аргумента. В одной из этих формул имеются косинус двойного аргумента и синус «одинарного» аргумента. Заменив в этой формуле 2x на x, а x на x/2, мы получаем формулу синуса половинного аргумента:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в верхней полуплоскости, то используется знак +, а если в нижней, то знак -.

Формула косинуса половинного аргумента

Используем другую формулу косинуса двойного аргумента, в которой присутствует еще только косинус «одинарного» аргумента. Заменив в этой формуле 2x на x, а хна x/2, мы получаем формулу косинуса половинного аргумента:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1,$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в правой полуплоскости, то используется знак +, а если в левой, то знак -.

Формулы тангенса половинного аргумента

Поделив синус половинного аргумента на косинус половинного аргумента, мы получаем формулу тангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}:\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}:\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$, где $x\neq\pi+2\pi n$.

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в первой или в третьей четвертях, то используется знак +, а если во второй или в четвертой, то знак -. Но имеются еще две формулы для тангенса половинного аргумента, свободные от иррациональности. Вот как они выводятся:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$, $x\neq\pi+2\pi n$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$, $x\neq\pi+2\pi n$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Воспользуемся формулами тангенса половинного аргумента, чтобы выразить через него синус и косинус «одинарного» аргумента: при этом обозначим тангенс половинного аргумента через t:

$$t=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$^2=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$t^2+t^2\cos x=1-\cos x$$

$$\cos x=\frac{1-t}{1+t}$$

$$t=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\frac{1-t}{1+t}}=\frac{\sin x(1+t)}{2}$$, откуда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t}.$$

Тангенс выражается через тангенс половинного аргумента по уже известной нам формуле:

$\operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t}$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

В итоге имеем следующие формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

1. $$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

2. $$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

3. $tgx=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1-tg^2\dfrac{x}{2}}$.

Формулы преобразования суммы в произведение

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
5. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=r\sin(\alpha+\phi)$, где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, φ определяется из соотношения $\cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
6. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z$;
7. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z$.

Формулы преобразования произведения в сумму

1. $\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)),$, то есть произведение синуса и косинуса двух чисел равно полусумме синуса суммы этих чисел и синуса их разности.
2. $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)),$, то есть произведение косинусов двух чисел равно полусумме косинуса суммы этих чисел и косинуса их разности.
3. $-(3x-5)=2$, то есть произведение синусов двух чисел равно полуразности косинуса разности этих чисел и косинуса их суммы.

Задания для практического занятия:

1. Упростить выражение:

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

2. Вычислить $tg\beta$, если $tg\alpha=1$ и $tg(\alpha-\beta)=-2.$

3. Вычислить $\sin 75^0.$

4. Вычислить $\cos 15^0.$

5. Найдите $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right), если tg\alpha=\dfrac{3}{4}.$

6. Упростить $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}.$

7. Вычислить $\cos 840^0$.

8. Вычислить $\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$.

9. Упростить $\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}\right)$.

10. Вычислить $\cos 15^0-\sin 15^0$.

11. Вычислить $2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$.

Практическое занятие №15, №16. Преобразование тригонометрических выражений.
Цель:

- ознакомиться с основными формулами приведения и методами преобразований тригонометрических выражений, овладеть техникой выполнения действий по преобразованию тригонометрических выражений с применением формул приведения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Формулы сложения аргументов
Синус суммы двух чисел равен сумме произведений синуса первого числа на косинус второго и косинуса первого числа на синус второго:
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
Доказательство строится с использованием формул приведения:
$$\sin(x+y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y=$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
, что и требовалось доказать.
Синус разности двух чисел равен разности произведений синуса первого числа на косинус второго и косинуса первого числа на синус второго:
$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
Доказательство опирается на четность косинуса и нечетность синуса:
$$\sin(x-y)=\sin(x+(-y))=$$
$$=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=$$
$$=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
, что и требовалось доказать.

Косинус разности двух чисел равен сумме произведений косинусов и произведения синусов данных чисел:
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
Косинус суммы двух чисел равен разности произведения косинусов и произведения синусов данных чисел
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
Доказательство опирается на четность косинуса и нечетность синуса:
$$\cos(x+y)=\cos(x-(-y))=$$
$$=\cos x\cos(-y)+\sin x\sin(-y)=$$
$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
, что и требовалось доказать.
Тангенс суммы (разности)

Если числа x, y и x±y входят в область определения тангенса, то тангенс суммы (разности) чисел x и y равен сумме (разности) тангенсов этих чисел, деленной на единицу минус (плюс) произведение тангенсов этих чисел:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$, если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} \pm \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

что и требовалось доказать.

Формулы двойного аргумента

Положив в формулах синуса суммы, косинуса суммы и тангенса суммы $y = x$, получим формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

Заметим, что формула косинуса двойного угла имеет два разных продолжения, так как в ней можно выразить $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$, а можно выразить $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Формулы половинного аргумента

Формула синуса половинного аргумента

Среди формул двойного аргумента для синуса и косинуса есть такие, в которых участвуют всего два выражения. Это формулы косинуса двойного аргумента. В одной из этих формул имеются косинус двойного аргумента и синус «одинарного» аргумента. Заменив в этой формуле 2x на x, а x на x/2, мы получаем формулу синуса половинного аргумента:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в верхней полуплоскости, то используется знак +, а если в нижней, то знак -.

Формула косинуса половинного аргумента

Используем другую формулу косинуса двойного аргумента, в которой присутствует еще только косинус «одинарного» аргумента. Заменив в этой формуле 2x на x, а xна x/2, мы получаем формулу косинуса половинного аргумента:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1,$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в правой полуплоскости, то используется знак +, а если в левой, то знак -.

Формулы тангенса половинного аргумента

Поделив синус половинного аргумента на косинус половинного аргумента, мы получаем формулу тангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}:\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}:\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$, где $x\neq\pi+2\pi n$.

Здесь знак перед корнем зависит от того, каково число x/2: если оно оканчивается в первой или в третьей четвертях, то используется знак +, а если во второй или в четвертой, то знак -. Но имеются еще две формулы для тангенса половинного аргумента, свободные от иррациональности. Вот как они выводятся:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$, $x\neq\pi+2\pi n$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$, $x\neq\pi+2\pi n$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Воспользуемся формулами тангенса половинного аргумента, чтобы выразить через него синус и косинус «одинарного» аргумента: при этом обозначим тангенс половинного аргумента через t:

$$t=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$^2=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$t^2+t^2\cos x=1-\cos x$$

$$\cos x=\frac{1-t}{1+t}$$

$$t=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\frac{1-t}{1+t}}=\frac{\sin x(1+t)}{2}$$, откуда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t}$$.

Тангенс выражается через тангенс половинного аргумента по уже известной нам формуле:

$$\operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t}$$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

В итоге имеем следующие формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

4. $$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$;

5. $\cos x = \dfrac{1 - tg^2 \dfrac{x}{2}}{1 + tg^2 \dfrac{x}{2}}$;

6. $tgx = \dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1 - tg^2 \dfrac{x}{2}}$.

Формулы преобразования суммы в произведение

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций:

8. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

9. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

10. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

11. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

12. $a\sin\alpha + b\cos\alpha = r\sin(\alpha+\phi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, φ определяется из соотношения $\cos\phi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

13. $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

14. $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Формулы преобразования произведения в сумму

4. $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$, то есть произведение синуса и косинуса двух чисел равно полусумме синуса суммы этих чисел и синуса их разности.

5. $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)),$, то есть произведение косинусов двух чисел равно полусумме косинуса суммы этих чисел и косинуса их разности.

6. $-(3x-5) = 2$, то есть произведение синусов двух чисел равно полуразности косинуса разности этих чисел и косинуса их суммы.

Задания для практического занятия:

1. Вычислите значения остальных тригонометрических функций, если известно значение: $Sin\alpha = -0.6\ 270° < \alpha < 360°$
2. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}$
3. Выразить в радианах углы: $540°, 1260°, 450°$
4. Привести к тригонометрической функции острого угла: $\cos(1914°), \sin(-1560°)$
5. Упростите выражение: $\dfrac{\cos(\alpha - 90°)}{\sin(180° - \alpha)} + tg(\alpha - 180°)$
6. Найдите значение выражения:

а) $\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$, б) $\sin 2\alpha + \sin \alpha$, $\alpha = 90^\circ$

в) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \beta = \frac{4}{5}, 0^\circ < \alpha < 90, 0^\circ < \beta < 90^\circ$

7. Упростите выражение: а) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha}$, б) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$, в)* $\frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}$

8. Найдите: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $tg\alpha = \frac{3}{4}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

9. Представить в виде произведения: а) $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ$; б) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$

10. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

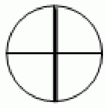
Практическое занятие №17, №18. Решение простейших тригонометрических уравнений.
Цель:

– ознакомиться с основными методами и способами решения простейших тригонометрических уравнений, овладеть техникой решения простейших тригонометрических уравнений.

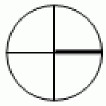
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Тригонометрические уравнения. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется тригонометрическим. Простейшие тригонометрические уравнения.

$\cos x = a$.

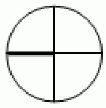
1). $\cos x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;

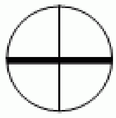


4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

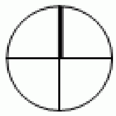
5). $\cos x = a$, $|a| \le 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

$\sin x = a$.

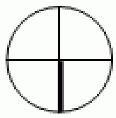
1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;



2). $\sin x = 1$, $x = \pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\sin x = -1$, $x = -\pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;

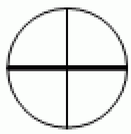


4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\sin x = a$, $|a| \le 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

$\tan x = a$.

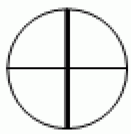
1). $\tan x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;



2). $\tan x = a$, $x = \arctan a + \pi k$, k – любое целое число.

$\cot x = a$.

1). $\cot x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cot x = a$, $x = \operatorname{arccot} a + \pi k$, k – любое целое число.

Задания для практического занятия:

1 вариант 2 вариант

Решите уравнения:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ x = \sqrt{3}$

$ctg\ x = -\sqrt{3}$

$\sin 2x = 0$

$\cos\frac{x}{2} = 1$

$\sin 5x = 1$

$tg\ 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$ctg\ x = \sqrt{3}$

$\cos 2x = 1$

$\sin\frac{x}{3} = 0$

$\cos\frac{x}{2} = -1$

$tg\ 5x = -1$

Практическое занятие №19. Различные методы решения тригонометрических уравнений.
Цель:

- ознакомиться с основными видами тригонометрических уравнений, методами и способами решения тригонометрических уравнений, овладеть техникой решения тригонометрических уравнений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:
Методы решения тригонометрических уравнений. Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида (см. выше) и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.
1. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры
(метод замены переменной и подстановки).

П р и м е р . Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0$.

Р е ш е н и е . Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

2. Разложение на множители. Этот метод рассмотрим на примерах.
П р и м е р 1. Решить уравнение: $\sin x+\cos x=1$.
Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:
$\sin x+\cos x-1=0$,
преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x-2\sin^2(x/2)=0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)-2\sin^2(x/2)=0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2)-\sin(x/2)]=0,$$

1). $\sin(x/2)=0$, 2). $\cos(x/2)-\sin(x/2)=0$,

$x/2=\pi k$, $\tan(x/2)=1$,

$x_1=2\pi k$; $x/2=\arctan 1+\pi n$,

$x/2=\pi/4+\pi n$,

$x_2=\pi/2+2\pi n$.

П р и м е р 2. Решить уравнение: $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=1$.
Решение . $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x=0$,
$\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x=0$,
$\sin x\cdot(\cos x-\sin x)=0$,

1). $\sin x = 0$, 2). $\cos x - \sin x = 0$,

$x_1 = \pi k$; $\tan x = 1$,

$x_2 = \pi / 4 + \pi n$,

П р и м е р 3. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$,

$2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x$,

$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0$,

$\cos 4x \cdot 2 \sin 3x \cdot \sin x = 0$,

1). $\cos 4x = 0$, 2). $\sin 3x = 0$, 3). $\sin x = 0$,

$4x = \pi / 2 + \pi k$, $3x = \pi n$, $x_3 = \pi m$.

$x_1 = \pi / 8 + \pi k / 4$; $x_2 = \pi n / 3$;

Задания для практического занятия:

Решить уравнения:

1. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
2. $3tg^2 x + 2tgx - 1 = 0$
3. $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$
4. $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$
5. $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Практическое занятие №20. Различные методы решения тригонометрических уравнений.
Цель:

– ознакомиться с основными видами тригонометрических уравнений, методами и способами решения тригонометрических уравнений, овладеть техникой решения тригонометрических уравнений.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Методы решения тригонометрических уравнений. Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида (см. выше) и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1) Рассмотрим метод введения дополнительного угла на примере решения следующей задачи.
Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \sin x + \cos x$.	(1)

Решение. Заметив, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4},$$

преобразуем правую часть формулы (1):

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда вытекает, что выражение (1) можно переписать в виде:

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Поскольку

$$-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1,$$

причем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

то

$$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$-\sqrt{2} \le y = \sin x + \cos x \le \sqrt{2}.$$

Ответ. Наибольшее значение функции (1) равно $\sqrt{2}$, наименьшее значение функции (1) равно $-\sqrt{2}$.

Замечание. В рассмотренной задаче угол $\frac{\pi}{4}$ и является ***дополнительным углом***.

Теперь докажем ***формулу дополнительного угла (вспомогательного аргумента)*** в общем виде. Для этого рассмотрим выражение

$a\sin x + b\cos x$	(2)

где a и b – произвольные, отличные от нуля числа, и преобразуем его:

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$	(3)

Введем ***дополнительный угол (вспомогательный аргумент)*** φ , у которого:

$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$	(4)

В случае, когда a и b являются положительными числами, в качестве дополнительного угла можно взять, например, угол

$$\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда выражение (3) принимает вид:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\varphi\right).$$

Таким образом, мы получили формулу

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\varphi\right),$$

которую и называют ***формулой дополнительного угла (вспомогательного аргумента).***

Если же дополнительный угол, в отличие от формул (4), ввести по формулам

$$\begin{cases}\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\end{cases}$$

то выражение (3) примет вид

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\sin\varphi+\cos x\cos\varphi\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right),$$

и мы получаем **другой вид формулы дополнительного угла**:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right).$$

2) **Метод использования универсальной подстановки.**

Уравнения вида F(sinx, cosx, tgx) = 0 сводятся к алгебраическому при помощи универсальной тригонометрической подстановки $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

Выразив синус, косинус и тангенс через тангенс половинного угла. Этот прием может привести к уравнению высокого порядка. Решение которого затруднительно.
При замене возможна потеря корней $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Sinx= $\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

sinx +cosx =1, $\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} = 1$, очевидно, что $1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2} \neq 0$,

$2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + 1 - tg^2\dfrac{x}{2} = 1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}$

$2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2} - 2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 0$, Пусть $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ тогда $t(t-1) = 0$, $t_1 = 0$

или $t_2 = 1$, $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ или $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 1$

$\dfrac{x}{2} = \pi n, n \in Z$, $x = 2\pi n, n \in Z$ $\dfrac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x_1 = 2\pi n, n \in Z$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

3. Метод понижения степени.

$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$

Используя формулы понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$,

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ получаем равносильное уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2},$$

$\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0$, $(\cos 2x + \cos 6x) - \cos 4x = 0$,

используя формулы суммы синусов

$2\cos 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x = 0$, $\cos 4x\,(2\cos 2x - 1) = 0$,

$\cos 4x = 0$ или $2\cos 2x - 1 = 0$

$4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$,

$x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n, n \in Z$, $2x = \pm \arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$, $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n, n \in Z, x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Задания для практического занятия:

1) $2\cos^2 x + 2\sin x = 2{,}5$
2) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$
3) $\sin 2x = -\cos 2x$
4) $\sin 2x - \sin 3x = 0$
5) $(\cos x - \sin x)^2 = \cos 2x$
6) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$

Практическое занятие №21. Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель:

- ознакомиться с основными видами тригонометрических неравенств, методами и способами решения тригонометрических неравенств, овладеть техникой решения тригонометрических неравенств.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется тригонометрическим неравенством.

К простейшим тригонометрически неравенствам относятся следующие 16 неравенств:
$\sin x>a$, $\sin x\geq a$, $\sin x<a$, $\sin x\leq a$,
$\cos x>a$, $\cos x\geq a$, $\cos x<a$, $\cos x\leq a$,
$\tan x>a$, $\tan x\geq a$, $\tan x<a$, $\tan x\leq a$,
$\cot x>a$, $\cot x\geq a$, $\cot x<a$, $\cot x\leq a$.

Здесь x является неизвестной переменной, a может быть любым действительным числом.

Неравенства вида $\sin x>a$, $\sin x\geq a$, $\sin x<a$, $\sin x\leq a$

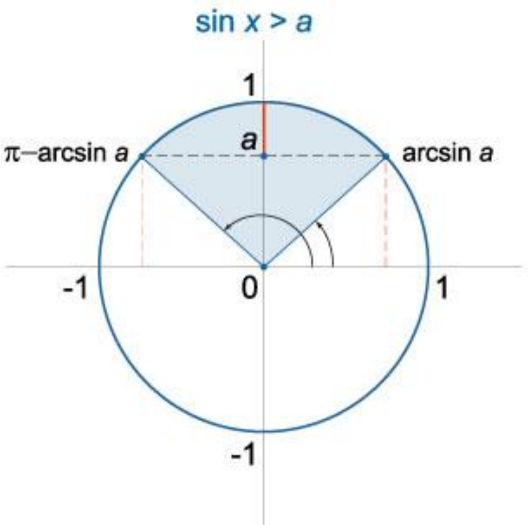


Рис.1

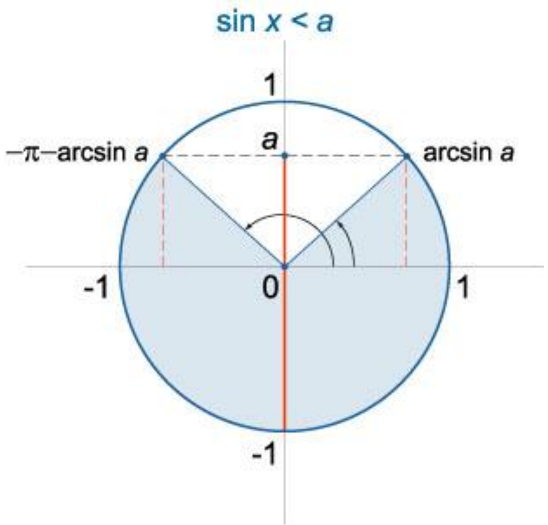


Рис.2

Неравенство $\sin x>a$

При $|a|\geq 1$ неравенство $\sin x>a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

При $a<-1$ решением неравенства $\sin x>a$ является любое действительное число: $x\in R$

При $-1\leq a<1$ решение неравенства $\sin x>a$ выражается в виде $\arcsin a+2\pi n<x<\pi-\arcsin a+2\pi n, n\in Z$ (рис.1).

Неравенство $\sin x\geq a$

При $a>1$ неравенство $\sin x\geq a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

При $a\leq -1$ решением неравенства $\sin x\geq a$ является любое действительное число: $x\in R$

Случай $a=1$ $x=\pi/2+2\pi n, n\in Z$

При $-1<a<1$ решение нестрогого неравенства $\sin x\geq a$ включает граничные углы и имеет вид $\arcsin a+2\pi n\leq x\leq \pi-\arcsin a+2\pi n, n\in Z$ (рис.1).

Неравенство $\sin x<a$

При $a>1$ решением неравенства $\sin x<a$ является любое действительное число: $x\in R$

При $a\leq -1$ у неравенства $\sin x<a$ решений нет: $x\in\emptyset$

При $-1<a\leq 1$ решение неравенства $\sin x<a$ лежит в интервале $-\pi-\arcsin a+2\pi n<x<\arcsin a+2\pi n, n\in Z$ (рис.2).

Неравенство $\sin x\leq a$

При $a\geq 1$ решением неравенства $\sin x\leq a$ является любое действительное число: $x\in R$

При $a<-1$ неравенство $\sin x\leq a$ решений не имеет: $x\in\emptyset$

Случай $a=-1$ $x=-\pi/2+2\pi n, n\in Z$

При $-1<a<1$ решение нестрогого неравенства $\sin x \le a$ находится в интервале $-\pi-\arcsin a+2\pi n \le x \le \arcsin a+2\pi n, n\in Z$ (рис.2).

Неравенства вида $\cos x>a$, $\cos x\ge a$, $\cos x<a$, $\cos x\le a$

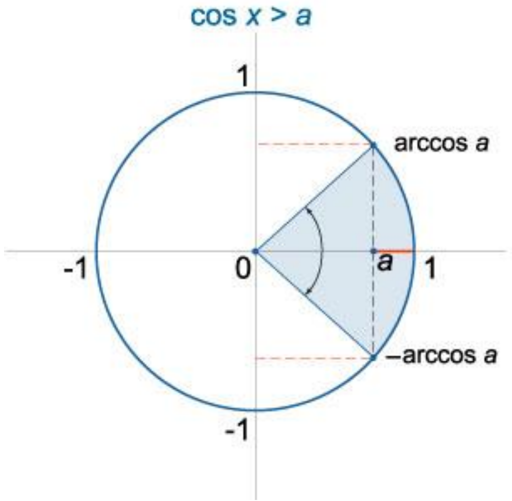


Рис.3

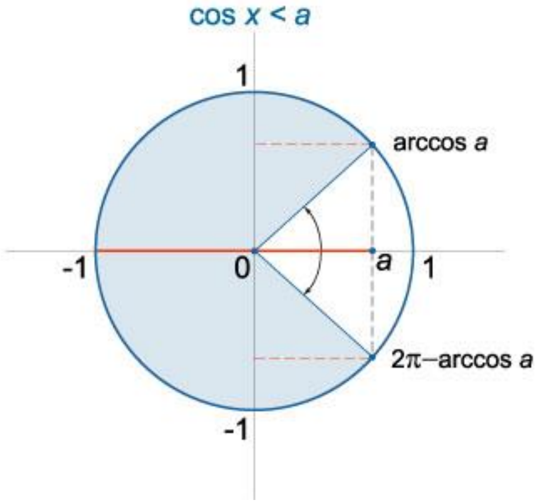


Рис.4

Неравенство $\cos x>a$

При $a\ge 1$ неравенство $\cos x>a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

При $a<-1$ решением неравенства $\cos x>a$ является любое действительное число: $x\in R$

При $-1\le a<1$ решение неравенства $\cos x>a$ имеет вид $-\arccos a+2\pi n<x<\arccos a+2\pi n, n\in Z$ (рис.3).

Неравенство $\cos x\ge a$

При $a>1$ неравенство $\cos x\ge a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

При $a\le -1$ решением неравенства $\cos x\ge a$ является любое действительное число: $x\in R$

Случай $a=1$ $x=2\pi n, n\in Z$

При $-1<a<1$ решение нестрогого неравенства $\cos x\ge a$ выражается формулой $-\arccos a+2\pi n\le x\le \arccos a+2\pi n, n\in Z$ (рис.3).

Неравенство $\cos x<a$

При $a>1$ неравенство $\cos x<a$ справедливо при любом действительном значении x: $x\in R$

При $a\le -1$ неравенство $\cos x<a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

При $-1<a\le 1$ решение неравенства $\cos x<a$ записывается в виде $\arccos a+2\pi n<x<2\pi-\arccos a+2\pi n, n\in Z$ (рис.4).

Неравенство $\cos x\le a$

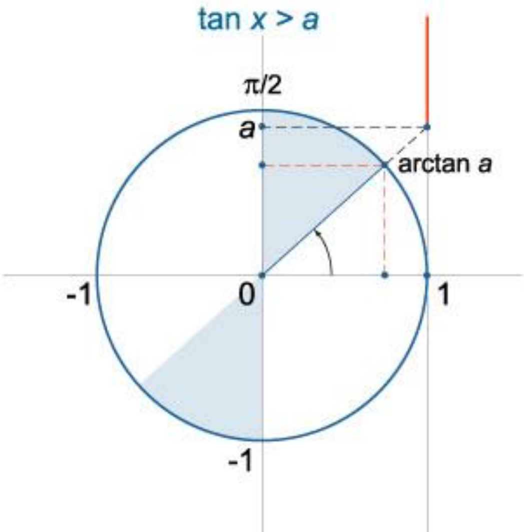
При $a\ge 1$ решением неравенства $\cos x\le a$ является любое действительное число: $x\in R$

При $a<-1$ неравенство $\cos x\le a$ не имеет решений: $x\in\emptyset$

Случай $a=-1$ $x=\pi+2\pi n, n\in Z$

При $-1<a<1$ решение нестрогого неравенства $\cos x\le a$ записывается как $\arccos a+2\pi n\le x\le 2\pi-\arccos a+2\pi n, n\in Z$ (рис.4).

Неравенства вида $\tan x>a$, $\tan x\ge a$, $\tan x<a$, $\tan x\le a$



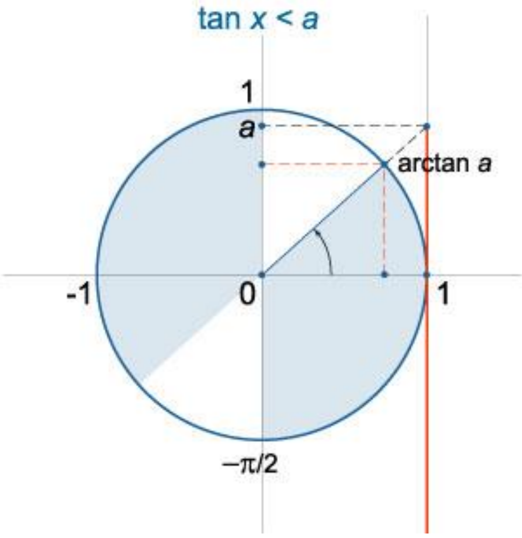


Рис.5 Рис.6

Неравенство $\tan x>a$

При любом действительном значении a решение строгого неравенства $\tan x>a$ имеет вид $\arctan a+\pi n<x<\pi/2+\pi n, n\in Z$ (рис.5).

Неравенство $\tan x\geq a$

Для любого значения a решение неравенства $\tan x\geq a$ выражается в виде $\arctan a+\pi n\leq x<\pi/2+\pi n, n\in Z$ (рис.5).

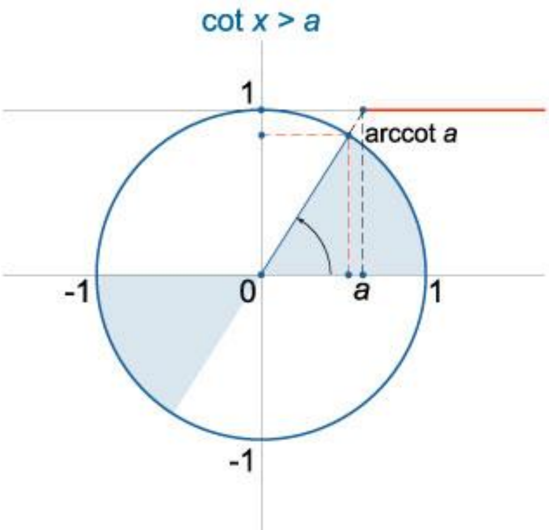
Неравенство $\tan x<a$

Для любого значения a решение неравенства $\tan x<a$ записывается в виде $-\pi/2+\pi n<x<\arctan a+\pi n, n\in Z$ (рис.6).

Неравенство $\tan x\leq a$

При любом a неравенство $\tan x\leq a$ имеет следующее решение: $-\pi/2+\pi n<x\leq \arctan a+\pi n, n\in Z$ (рис.6).

Неравенства вида $\cot x>a$, $\cot x\geq a$, $\cot x<a$, $\cot x\leq a$



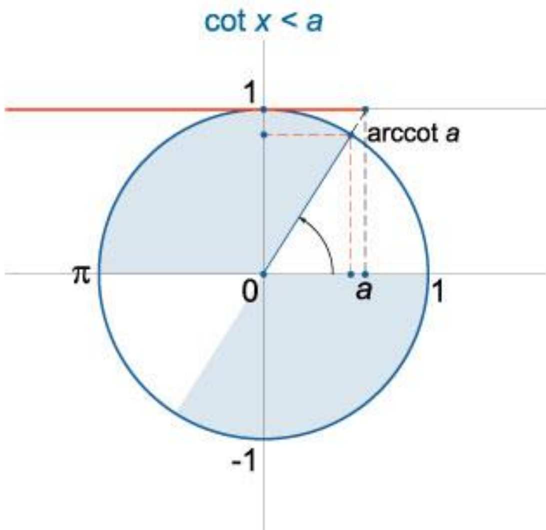


Рис.7 Рис.8

Неравенство $\cot x>a$

При любом a решение неравенства $\cot x>a$ имеет вид $\pi n<x<\mathrm{arccot}\, a+\pi n, n\in Z$ (рис.7).

Неравенство $\cot x\geq a$

Нестрогое неравенство $\cot x\geq a$ имеет аналогичное решение $\pi n<x\leq \mathrm{arccot}\, a+\pi n, n\in Z$ (рис.7).

Неравенство $\cot x<a$

Для любого значения a решение неравенства cotx<a лежит в открытом интервале arccot a+πn<x<π+πn,n∈Z (рис.8).

Неравенство cotx≤a

При любом a решение нестрогого неравенства cotx≤a находится в полуоткрытом интервале arccot a+πn≤x<π+πn,n∈Z (рис.8).

Задания для практического занятия:

Решить неравенства:

1) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;	12) $\cos\frac{x}{2} \ge -\frac{1}{2}$ 13) $\cos 5x < \frac{1}{2}$;
3) $\sin x \ge 0$; 4) $\sin x < 1$;	14) $\cos 2x < -\frac{1}{3}$; 15) $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; 16)
5) $\sin x \ge 1$; 6) $\sin x < \frac{1}{3}$;	$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 17) $\cos\frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 18)
7) $\sin x < 0$; 8) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;	$\cos x > 0$; 19) $\cos 2x \le 0$; 20)
9) $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 0$; 10) $\sin\frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;	$\sqrt{2}\cos 2x \le -1$; 21) $\cos x < \frac{4}{5}$;
11) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$	22) $\frac{1}{\cos 2x} + 1 \le 0$;

Практическое занятие №22, №23. Построение графиков функций, заданных различными способами.
Цель:

- ознакомиться с понятием функции, основными видами функций, способами задания функций, овладеть техникой построения графиков функций, заданных различными способами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Определение. Пусть даны два множества действительных чисел X и*Y*. *Функциональной зависимостью (функцией)* называется закон, по которому каждому значению величины *x€X,* называемой *аргументом,* ставится в соответствие некоторое (единственное) число *y =f(x)*из множества*Y.*Множество *X* называется *областью определения функции* (обозначается D (f) илиD_f).
Множеством значений E(f) числовой функцииf называется множество всех *a €*R,для которых существует хотя бы одно*x€ D(f)*такое что*f(x)*= *a.* Можно сказать иначе: E(f) состоит из тех значений *a,* при которых уравнение*f(x) = a*имеет хотя бы одно решение. В простых случаях это уравнение можно исследовать и тем самым отыскать E(*f*).
В математике словом "функция" называют и закон (правило) соответствия *f*, и величину *f*(x).
Способы задания функций.
1. *Аналитический* - задание функции формулой, показывающей способ вычисления значения функции по соответствующему значению аргумента. Среди всего многообразия функций выделяют группу функций, называемых *элементарными* - это алгебраические функции (степенные с рациональным показателем, многочлены, рациональные) и *трансцендентные* функции (степенные с иррациональным показателем, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические), а также функции, получаемые из названных с помощью арифметических действий, (сложения, вычитания, умножения и деления) и суперпозиций, применяемых конечное число раз.

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно,* когда дано выражение *y* через x, т.е. формула имеет вид *y = f(x\ неявно,* когда*x и y* связаны между собой уравнением вида*F(x, y) = 0, а также параметрически,* когда соответствующие друг другу значения *x* и *y* выражены через третью переменную величину*t*,называемую параметром.
Например, два равенства $x = 2t$, $y = 3t^2+4$ определяют
параметрически через параметр функцию $y = \frac{3}{4}x^2 + 4$.
2.*Табличный* - указание значений функции от соответствующих значений аргумента. Этот способ применяется в тех случаях, когда область определения функции состоит из конечного числа значений. В виде таблиц записывают результаты экспериментального исследования каких-либо процессов.
3.*Графический.* Для функции, заданной графиком, по чертежу находятся значения у, отвечающие данным значениям x, разумеется, приближенно.
Композиция функций. Пусть заданы две функции *x = g*(*t*) и *y = f(x*\причем область определения функции f содержит область значений функции*g,*тогда каждому значению*t*из области определения функции*g*естественным образом соответствует y такое, что *y = f(x)* где x= *g(t).*Эта функция, определяемая соответствием *y* =f(g (t)), называется *сложной функцией,* или *композицией (суперпозицией) функций.*
Например, функция $y = \sqrt{\cos x}$представляется как сложная функция так: $y= \sqrt{u}$ *, и =cosx*
Свойства четной функции
Область определения четной функции симметрична относительно точки *x* = 0 на координатной прямой *Ox.*
Сумма, разность, произведение и частное четных функций являются четными функциями.
График четной функции симметричен относительно оси *Oy.*

График четной функции симметричен относительно оси *Oy,* а нечетной функции - относительно начала координат.

Свойства нечетной функции.

Область определения нечетной функции симметрична относительно точки $x = 0$ на координатной прямой *Ox.*

Сумма и разность нечетных функций являются нечетными функциями, а произведение и частное двух нечетных функций являются четными функциями.

Вопросы для закрепления теоретического материала
к практическому занятию:

Что называется функцией?

Что такое область определения и область значений функции?

Что называется функцией обратной данной?

Что называется графиком функции?

Каковы особенности графиков прямой и обратной функции?

От чего зависит область определения сложной функции?

Задания для практического занятия:

Построить графики функций.

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1. $y = 3x, y = -3x$ 2. $y = \frac{6}{x}, y = -\frac{6}{x}$ 3. $y = 4x + 5$ 4. $y = x^2 - 6x + 7$ 5. $y = 3x^3$	$y = 4x, y = -4x$ $y = \frac{8}{x}, y = -\frac{8}{x}$ $y = -3x + 6$ $y = -x^2 + 4x - 3$ $y = 2x^3$	$y = 5x, y = -5x$ $y = \frac{10}{x}, y = -\frac{10}{x}$ $y = -5x + 1$ $y = x^2 + 8x - 6$ $y = -2x^3$

Практическое занятие №24. Область определения и область значений обратной функции.

Цель:

- ознакомиться с понятием обратной функции, ее свойствами, способами задания функции, графиком; овладеть техникой построения графиков обратных функций, заданных различными способами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Основные определения.

Опр. Функцией называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x, называемой аргументом, ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной y, называемой функцией: $y = f(x)$, где f – закон соответствия.

<u>Пример</u> $y = x^2$; $f(x) = \sin x$.

Опр. Областью определения функции (ООФ: $D(y)$) называется множество допустимых действительных значений аргумента, при которых функция имеет смысл в области вещественных чисел; множество значений, которые при этом принимает функция, называется ее областью значений ($E(y)$).

Опр. Геометрическое место точек, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты – значению функции, называется графиком функции.

Опр. Если выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, то функция называется четной, а при выполнении равенства $f(-x)=-f(x)$ – нечетной.
Опр. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется функцией общего вида.

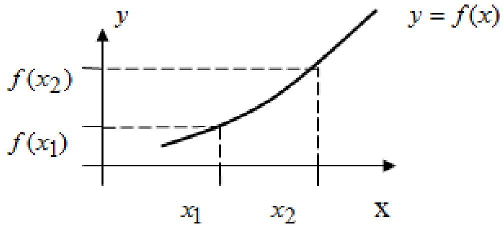
__Пример__ $y=x^2;\ \ x^4;\ \ x^6;\ \ \cos x$ – четные функции;

$y=x;\ x^3;\ x^5;\ \ \sin x;\ tgx;\ ctgx$ – нечетные функции;

$y=a^x;\ \log_a x;\ \ 2x-4$ – функции общего вида.

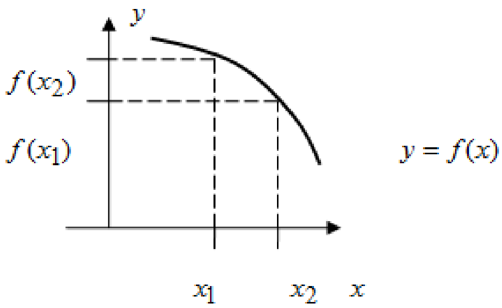
Опр. Функция называется периодической, если существует такое вещественное число t, что $\forall x\in D(x)$ выполняется равенство $f(x+t)=f(x)$, при этом меньшее положительное число T, при котором выполняется указанное равенство, называется периодом функции.
__Пример__ $y=\cos x;\quad T=2\pi$, так как $y(x+T)=\cos(x+2\pi)=\cos x=y(x)$.

Опр. Функция называется возрастающей($f(x)\uparrow$) на интервале $[a;\,b]$, который в дальнейшем будем называть сегментом, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.



при $x_2>x_1$ выполняется $f(x_2)>f(x_1)$

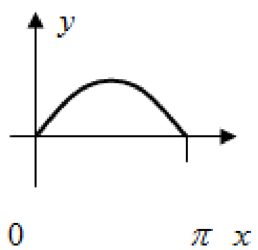
Опр. Функция называется убывающей ($f(x)\downarrow$)на интервале $[a;\,b]$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



при $x_2>x_1$ выполняется $f(x_2)<f(x_1)$

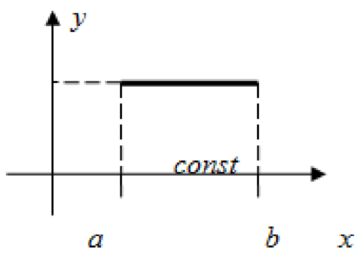
Опр. Возрастающие или убывающие на сегменте $[a;\,b]$ функции объединяются под общим названием монотонные функции.

__Пример__ Указать интервалы монотонности функции $f(x)=\sin x$ на сегменте $[0;\,\pi]$.



Из рисунка видно, что $f(x)\uparrow\forall x\in\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $f(x)\downarrow\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right)$.

Опр. Если на сегменте $[a;\,b]$ функция не меняет своего значения, то она называется постоянной.



Другие определения теории функций действительной переменной будут вводиться ниже по мере необходимости.
Обратная функция.
Пусть задана функция $y=f(x)$. Если график этой функции пересекает ось абсцисс (Ox) в единственной точке, то можно найти такой закон, по которому каждому значению переменной y будет поставлено в соответствие единственное значение переменной x, т.е. $x=\varphi\,(y)$. Такой закон соответствия называется обратной функцией.

__Пример__ Найти обратную функцию к функции $y=8x+5$.

Выразив переменную x из этого равенства, найдем обратную функцию $x=\dfrac{y-5}{8}$.

Способы задания функции.
Функция может быть задана одним из следующих способов:
– аналитический, т.е. в виде аналитической формулы (например, $y=x^3$);
– графический, т.е. в виде графика для всех значений аргумента x из $D(x)$;

– табличный, т.е. в виде таблицы

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

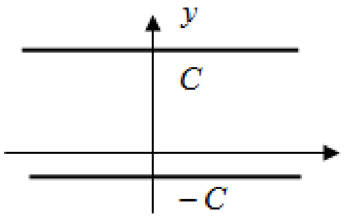
– словесный, т.е. функция задается на каждом интервале разными аналитическими формулами, графиком или таблицей, например,

$$f(x)=\begin{cases}-1, \ \forall x<0;\\ \ \ 0, \quad x=0;\\ \ \ 1, \ \forall x>0\end{cases}.$$

Основные элементарные функции.

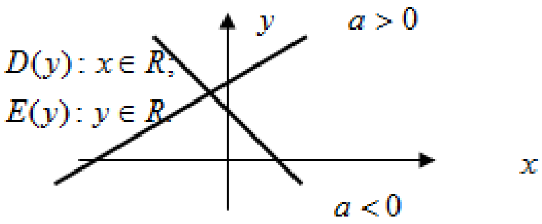
Рассмотрим *основные элементарные функции:*

1) *постоянная* $y = C$



$D(y): x \in R;$
$E(y): y = C.$

2) *линейная* $y = ax + b$



3) *квадратичная* $y = ax^2 + bx + c$ $(D = b^2 - 4ac)$. Пусть $a > 0$ (значения x_0 и y_0 связаны с параметрами a, b и c и определяют расположение параболы относительно координатных осей;отметим, что парабола симметрична относительно прямой $x = x_0$):

Задача 1 Найдите область определения функции $y=\frac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$.

Решение. Область определения задается неравенством

$$(x+5)(x^2-5x-6)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -5\\ x\neq -1\\ x\neq 6\end{cases}, \text{так как } x^2-5x-6=0 \text{ при } x=-1, x=6$$

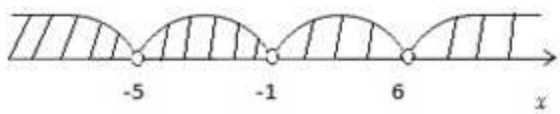


Рис. 1. Область определения функции $y=\frac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$

Ответ: $D(f): x \neq -5, x \neq -2, x \neq 6.$

Задача 2 Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-x}}$.

Решение. Область определения задается системой

$$\begin{cases}1+x\geq 0\\ 4-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x<4\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x<4.$$

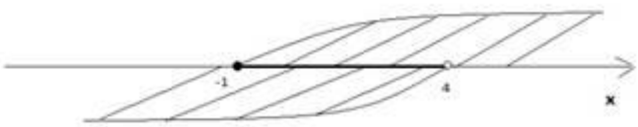


Рис. 2. Область определения функции $y=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-x}}$

Ответ: $x \in [-1; 4)$.

Задача 3 Найдите область определения и область значения функции $y=\sqrt{16-x^2}$. Изобразите схематически ее графики.

Решение.
1. Область определения задается неравенством (см. Рис. 3)
$16 - x^2 \geq 0 \iff (4-x)(4+x) \geq 0 \iff -4 \leq x \leq 4$.

2. Под корнем имеем функцию $u(x) = 16 - x^2$, где $x \in [-4;4]$ (см. Рис. 4). Область значения этой функции $u \in [0;16]$. Поскольку $y = \sqrt{u}$ и $u \in [0;16]$, то $y \in [0;4]$.

Ответ: $E(f) = [0;4]$.

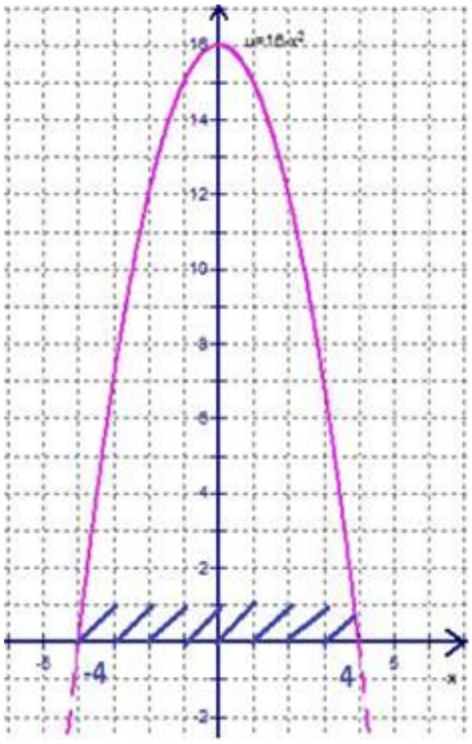


Рис. 3. График функции $u = 16 - x^2$

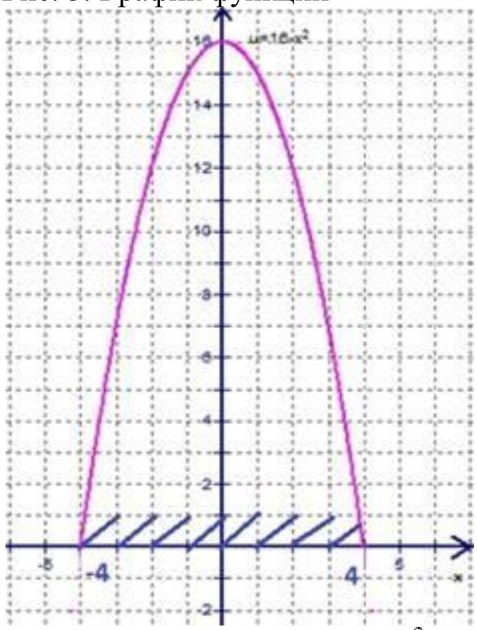


Рис. 4. График функции $u = 16 - x^2$ при $x \in [-4;4]$.

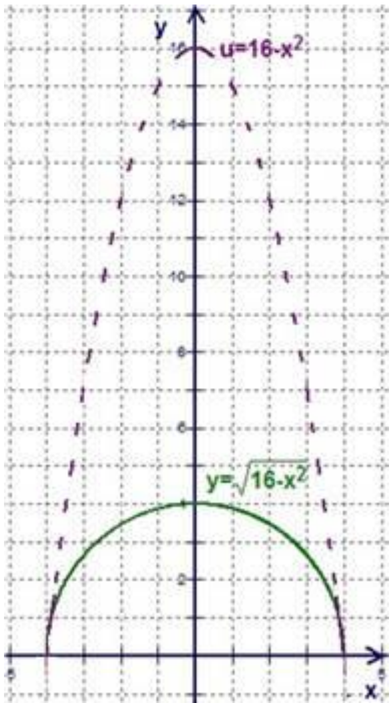


Рис. 5. Схематический график функции $y = \sqrt{16 - x^2}$.

3. Схематический график функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ изображен на Рис.5.

$u(x) = 16 - x^2, x \in [-4; 4], u \in [0; 16]$.

$y = \sqrt{16 - x^2}, x \in [-4; 4], y \in [0; 4]$.

x	-4	0	4
y	0	4	0

<u>Примечание</u>. На примере данной функции иллюстрируется связь между областью значения, областью определения и графиком.

1. Проекция графика функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ на ось x - область определения: $x \in [-4;4]$ (см. Рис. 6).

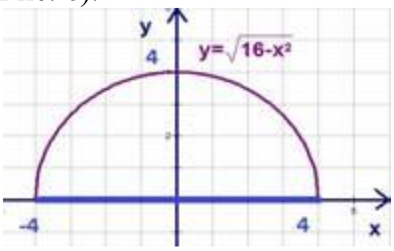


Рис. 6. Проекция графика функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ на ось x.

2. Область значений функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ – проекция графика на ось y.

<u>Сопутствующая задача с параметром</u>

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{16 - x^2} = a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Строится график функции $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Пересечение прямой $y = a$ и графика функции существует тогда и только тогда, когда $a \in [0; 4]$ (см. Рис. 7).

Ответ: $a \in [0; 4]$.

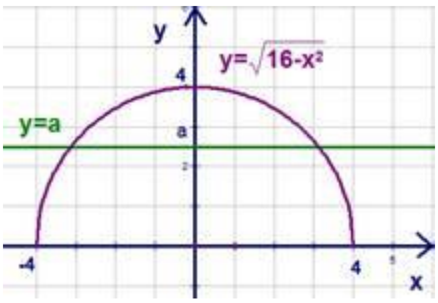


Рис. 7. График функций

<u>Задача с кусочно заданной функцией</u>

а. Найдите $D(f)$.

б. Вычислите $f(-2), f(0), f(4), f(8)$.

в. Постройте график функции.

г. Найдите $E(f)$.

д. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

в. Построим график функции $f(x)$ (см. Рис. 8).

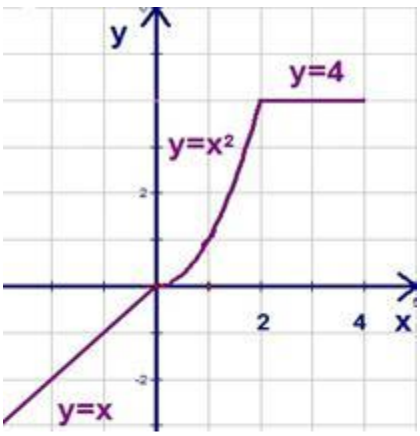


Рис. 8. График функции f(x)

С помощью графика решим остальные задачи.
а. Область определения $x \in (-\infty; 4]$ – проекция графика на ось x.
б. Из графика (см. Рис. 9) $f(-2) = -2,\ f(0) = 0, f(4) = 4,\ f(8)$ не существует.

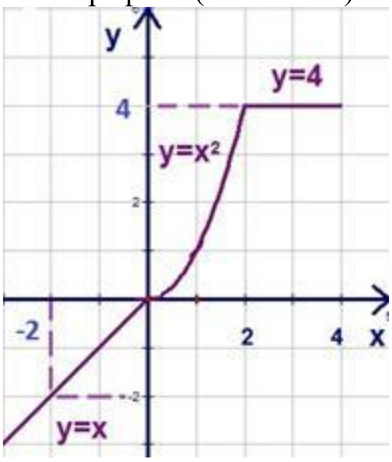


Рис. 9. График функции f(x) и ее значение в соотвествующих точках
г. Область значения $E(f) = (-\infty; 4]$ – проекция графика на ось y.
д. Искомое множество совпадает с областью значения функции. Значит $a \in (-\infty; 4]$.
Определение. Функция f называется *обратимой*, если для любых двух различных чисел x_1 и x_2, принадлежащих D_f, числа $f(x_1)$ и $f(x_2)$ также различны.
Пример 1. $y = 3x + 1$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 \neq 3x_2 + 1.$
Пример 2. $y = x^2,\ x \in [0; +\infty)$.
Пример 3. $y = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Пример 4. $y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$.
Пример 5. $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Пример 6. $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0, \pi)$.
Обратимость всех этих функций — частный случай следующей теоремы
Теорема. Строго монотонная функция обратима.
Функция является обратимой в том и только в том случае, если любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет с ее графиком не более одной общей точки.
Определение. Пусть функция f обратима, D_f — ее область определения, E_f— множество ее значений. Для каждого числа $p \in E_f$ обозначим через $\varphi(p)$такое число q из множества D_f, что $f(q) = p$ (такое число существует и притом только одно). Мы получили новую функцию с областью определения E_fи множеством значений D_f. Эта функция называется *обратной* функции f.
Пример 7. $f(x) = 5x - 2$.
Выяснить, обратима ли эта функция, и если обратима, то найти обратную.
$f(q) = p,$
$5q - 2 = p,$
$q = (p + 2)/5,$
$\varphi(x) = (x + 2)/5.$
Функция f обратима, φ — обратная функция.
Теорема. Графики взаимно обратных функций в одной и той же координатной плоскости симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четверти.
Доказательство. Пусть функция f с областью определения D и множеством значений E имеет обратную функцию φ. Пусть Γ_f, Γ_φ — графики функций fи φ соответственно. Точка $M(a, b)$ принадлежит $\Gamma_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = \varphi(b) \Leftrightarrow$ точка $M'(b, a) \in \Gamma_\varphi$.
Осталось доказать, что точки M и M' симметричны относительно биссектрисы первой и

третьей четверти. Эта биссектриса состоит из точек $C(t,t)$, где t — любое вещественное число. Чтобы доказать, что точки M и M' симметричны относительно биссектрисы, достаточно проверить, что биссектриса является серединным перпендикуляром отрезка MM', то есть что любая точка $C(t,t)$ равноудалена от точек M и M'.

$$CM = \sqrt{(t-a)^2 + (t-b)^2},$$
$$CM' = \sqrt{(t-b)^2 + (t-a)^2},$$
$$CM = CM'.$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Дайте определение области определения функции.
2. Что называют аргументом функции, как его обозначают
3. Что такое область определения функции, область значений функции?

Задания для практического занятия:

1.Найдите область определения функции, заданной формулой: $y=\dfrac{x}{x-1}$

2. Найдите область определения функции: $y=\sqrt{x}$

3. Найти область определения функции $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3}$

4. Функция спроса задана формулой Qd = 7-P. Постройте кривую спроса.

5. Зависимость объема предложения товара А от его цены представлена в таблице:

Цена (Р) (тыс. руб.)	**Объем предложения (Qs) (шт.)**
2	0
3	10
4	20
5	30
6	40
7	50

Нарисуйте кривую предложения данного товара.

6. Зависимость объема предложения товара А от его цены представлена в таблице:

Цена (Р) (тыс. руб.)	**Объем предложения (Qs) (шт.)**
2	0
3	10
4	20
5	30
6	40
7	50

Покажите на графике, что произойдет с кривой предложения данного товара, если производители увеличат предложение товара А на 10 единиц при каждом уровне цен.

7. Функция предложения товара У задана формулой Qs = –100 + 20Р. Нарисуйте кривую предложения.

8. В таблице представлены данные о ценах, объемах спроса и предложения товара Х. Начертите кривые спроса и предложения и определите равновесную точку.

Цена (Р) (долл.)	**Объем спроса (Qd) (шт.)**	**Объем предложения (Qs) (шт.)**
10	10	2
12	9	3
14	8	4
16	7	5
18	6	6
20	5	7

9. Объем спроса на товар А на данном рынке определяется формулой $Qd = 9 - P$, объем предложения – формулой $Qs = -6 + 2P$, где P – цена товара А. Найдите равновесную цену и равновесный объем продаж.

10. Кривая спроса на портфели для школьников описывается следующим уравнением $Q_D = 600 - 2p$, где Q_D объём спроса в месяц (в штуках), p – цена (в тыс. руб.) Кривая предложения описывается уравнением $Q_S = 300 + 4p$.

а) Каковы равновесная цена и объём товара?

б) Что случится, если цена установлена правительством на уровне 10 тыс. руб.? Охарактеризуйте это качественно и в количественном выражении.

11. Найти функции, обратные к данным. Указать области определения и области изменения данных и обратных к ним функций:

а) $y = x^3$. б) $y = \log_{1/2} x$. в) $y = \frac{1-x}{1+x}$. г) $y = x^2$ ($x<0$).

12. Доказать, что функция, обратная к дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - bc \neq 0$), сама является дробно-линейной.

13. Какому условию должны удовлетворять числа a, b, c и d, чтобы дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ была тождественна равна обратной к ней функции? Приведите несколько примеров.

14. Существует ли функция, обратная к функции $y = \cos x$ в интервале:
а) $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; б) $0 \le x \le \pi$; в) $\pi/2 \le x \le 3/2\,\pi$?

15. Существует ли функция, обратная к функции $y = \mathrm{tg}\, x$ в интервале:
а) $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; б) $0 \le x \le \pi$; в) $\pi/2 \le x \le 3/2\,\pi$?

16. Существует ли функция, обратная к функции $y = \{x\}$ в интервале:
а) $0 \le x \le 1/2$; б) $0 \le x \le 1$; в) $0 \le x < 1$; г) $1/2 \le x \le 3/2$?

Практическое занятие № 25. Степенные функции их свойства и графики.

Цель:

- ознакомиться с понятием степенной функции, ее свойствами, способами задания функции, графиком; овладеть техникой построения графиков степенных функций, заданных различными способами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Определение. Функция, заданная формулой $f(x) = x^n$, где , называется степенной функцией с натуральным показателем.

Свойства функции $f(x) = x^n$, где .

1) $D(f) = R$;

2) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

$n = 2k$, $f(x) = x^{2k}$

3) $f(x) > 0$

4)

5) Функция четная, так как D(f) симметрична относительно 0x и $f(–x) = (–x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$.

6) Функция возрастает на ; функция убывает натак как она четная. Следовательно, график функции аналогичен графику $f(x) = x^2$

1) $D(f) = R$;

2) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

$n = 2k – 1$, $f(x) = x^{2k – 1}$

3) при $x > 0$ $f(x) > 0$; при $x < 0$ $f(x) < 0$

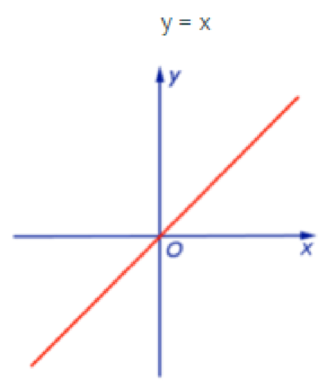
4) $E(f) = R$

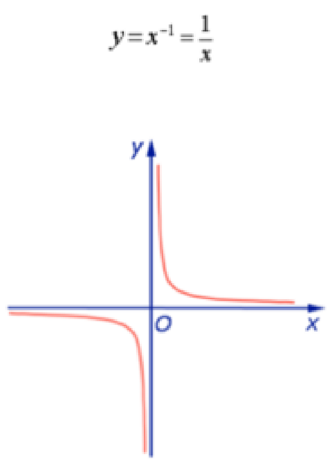
5) Функция нечетная, так как D(f) симметрична относительно O(0;0) и

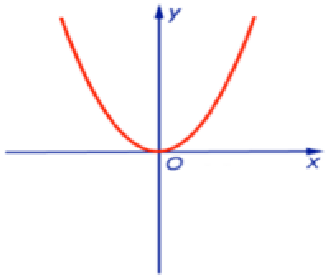
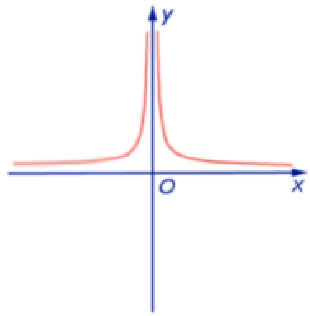
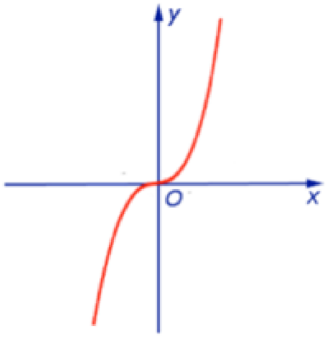
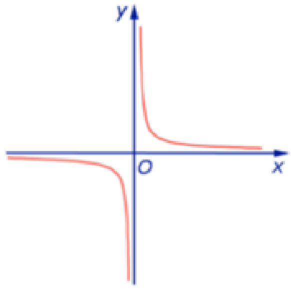
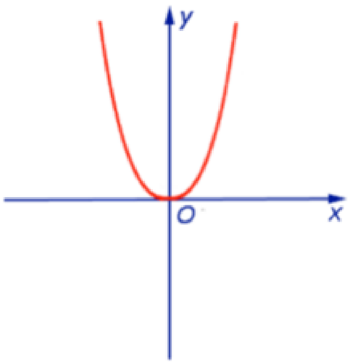
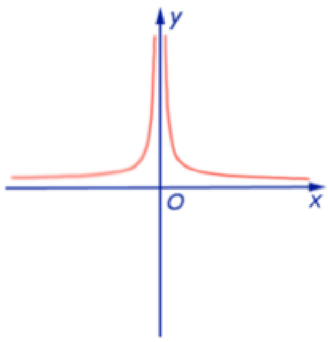
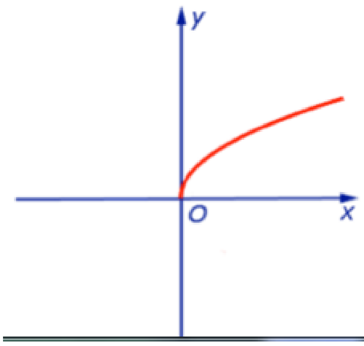
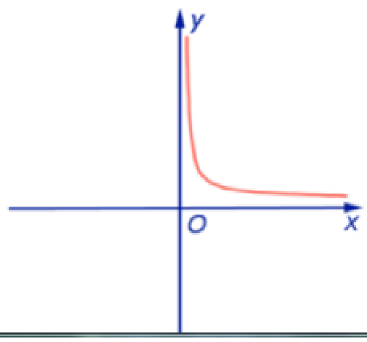
$f(–x) = (–x)^{2k – 1} = –x^{2k – 1} = –f(x)$.

6) Функция возрастает на R, так как если $x_2 > x_1$, $x_2^{2k – 1} > x_1^{2k – 1}$ и функция является нечетной, график функции аналогичен графику $f(x) = x^3$ (кубическая парабола)

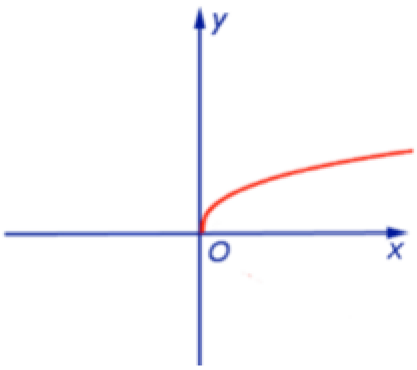
Графики степенных функций



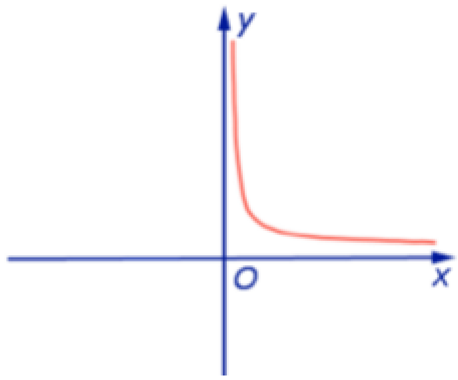


$y = x^2$ 	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 
$y = x^3$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 
$y = x^4$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 
$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 	$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 

$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$



$y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

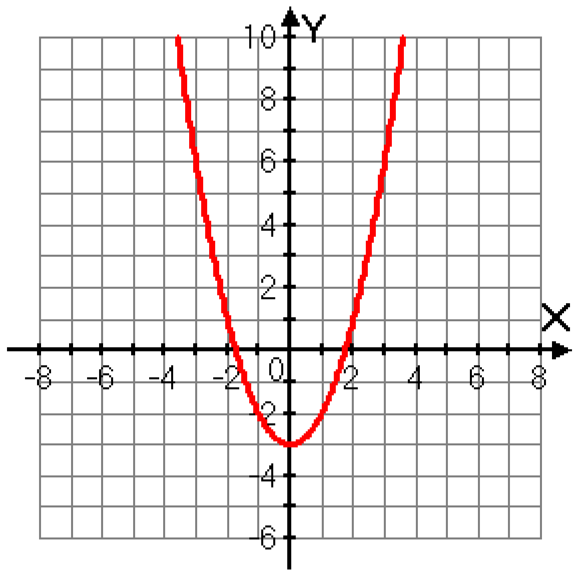


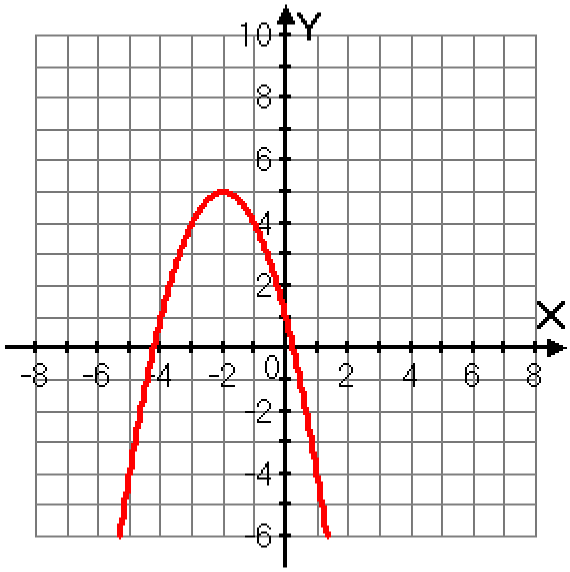
Задания для практического занятия:

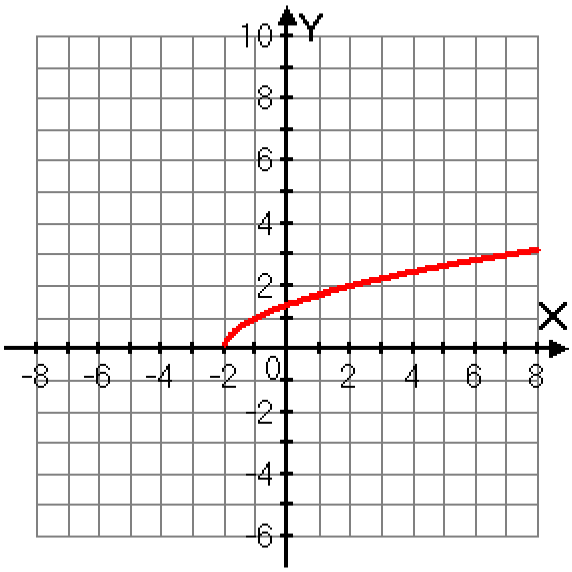
1)Начертите графики следующих функции:

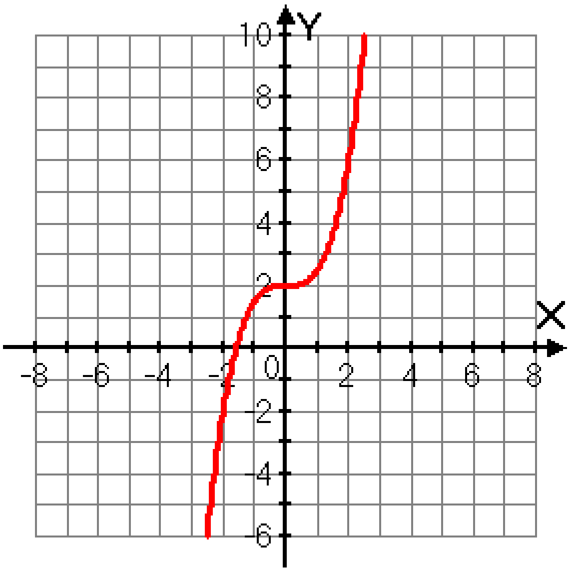
• $y = x^6$	• $y = (x+2)^3$	• $y = \sqrt{x+5}$
• $y = \sqrt{2-3x}$	• $y = x^3+5$	• $y = \sqrt{x}+2$

2)Напишите уравнения следующих функций:




Y
X
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8


Y
X
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8



3) Начертите графики следующих функций:

4) $y = 3\sqrt{2-x}$

5) $y = x^3 + 2$

6) $y = 2(x+2)^2 - 5$

7) $y = x^2 + 5x + 3$

8) $y = \sqrt{x-1} + 3$

Практическое занятие № 26. Показательные и логарифмические функции их свойства и графики.

Цель:

- ознакомиться с понятием показательной и логарифмической функции их свойствами и графиками, овладеть техникой построения графиков показательной и логарифмической функции, заданных различными способами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Показательная функция, её свойства и график.

Показательная функция это функция $y(x) = a^x$, зависящая от показателя степени x, при некотором фиксированном значении основании степени a.

Область определения показательной функции, множество значений

Рассмотрим показательную функцию $y(x) = a^x$

В дальнейшем будем считать, что основание степени a является положительным числом: $a > 0$. Тогда функция $y = a^x$ определена для всех x. Ее область определения: $- \infty < x + \infty$. При $a \neq 1$ она имеет множество значений: $0 < y < + \infty$ При $a = 1$ показательная функция является постоянной $y = 1$

График показательной функции

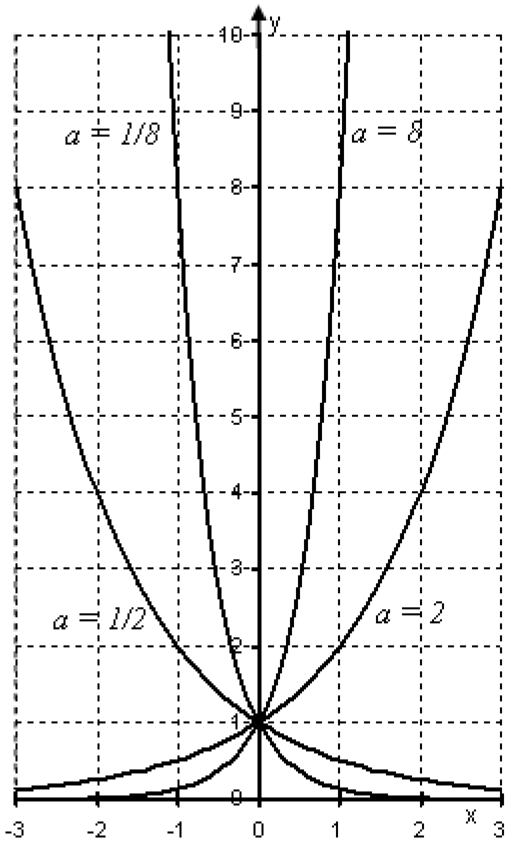


График функции $y = a^x$

На графике представлены значения показательной функции $y(x) = a^x$ для четырех значений основания степени: $a = 2$, $a = 8$, $a = 1/2$ и $a = 1/8$. На графике видно, что при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает. Чем больше основание степени a, тем более сильный рост. При $0 < a < 1$ показательная функция монотонно убывает. Чем меньше показатель степени a, тем более сильное убывание.

Свойства показательной функции

Основные формулы

Когда показатель степени x есть натуральное число $x = n$, выражение a^n есть произведение n множителей:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

Для произвольного значения x показательная функция определяется так, что обладает всеми свойствами натурального показателя степени.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq} = \left(a^q\right)^p$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(ab)^p = a^p\ b^q; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^q}$$

Частные значения

Пусть $y(x) = a^x$. Тогда $y(0) = a^0 = 1; \quad y(1) = a^1 = a; \quad y(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Экстремумы, возрастание, убывание

Показательная функция является монотонной, поэтому экстремумов не имеет. Основные ее свойства представлены в таблице.

	$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
Область определения	$-\infty < x + \infty$	$-\infty < x + \infty$
Область значений	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули, $y = 0$	нет	нет
Точки пересечения с осью ординат, $x = 0$	$y = 1$	$y = 1$

2) Логарифмическая функция, её свойства и график.

Логарифм по основанию *a* это функция $y(x) = \log_a x$, обратная к <u>показательной функции</u> по основанию *a*: $x(y) = a^y$.

В дальнейшем будем считать, что основание логарифма *a* положительное, не равное единице число: $a > 0, \ a \neq 0$.

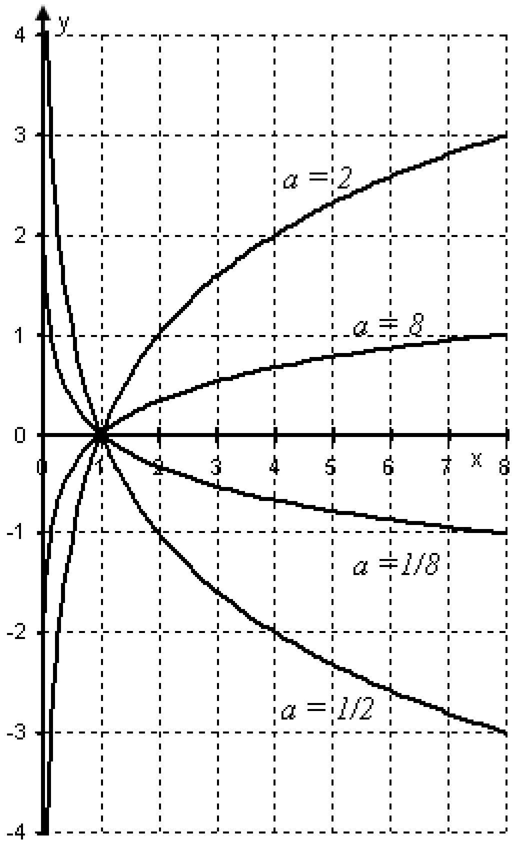


График функции $y = \log_a x$

График логарифма

График логарифма получается из <u>графика показательной функции</u> зеркальным отражением относительно прямой $y = x$. На графике представлены значения логарифма $y(x) = \log_a x$ для четырех значений основания логарифма: $a = 2$, $a = 8$, $a = 1/2$ и $a = 1/8$. На графике видно, что при $a > 1$ логарифм монотонно возрастает. С увеличением *x* рост существенно замедляется. При $0 < a < 1$ логарифм монотонно убывает.

Свойства логарифма

Область определения, множество значений, экстремумы, возрастание, убывание

Логарифм является монотонной функцией, поэтому экстремумов не имеет. Основные свойства логарифма представлены в таблице.

	$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
Область определения	$0 < x + \infty$	$0 < x + \infty$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули, $y = 0$	$x = 1$	$x = 1$
Точки пересечения с осью ординат, $x = 0$	нет	нет
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x$	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+0} \log_a x$	$-\infty$

Частные значения

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^n = n;$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1; \quad \log_a \frac{1}{a^n} = -n;$$

Логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается так: $\lg x = \log_{10} x$

Логарифм по основанию *e* называется натуральным логарифмом: $\ln x = \log_e x$

Натуральный логарифм это логарифм по основанию числа *e*: $\ln x = \log_e x$.

Десятичный логарифм это логарифм по основанию числа 10: $\ln x = \log_{10} x$.

Основные формулы логарифмов

Свойства логарифма, вытекающие из определения обратной функции: $\log_a a^x = x; \quad a^{\log_a x} = x$

Основное свойство логарифмов и его следствия

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p\log_a x; \qquad \log_a \sqrt[n]{x} \equiv \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Формула замены основания

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Логарифмирование это математическая операция взятия логарифма. При логарифмировании, произведения сомножителей преобразуются в суммы членов.

Потенцирование это математическая операция обратная логарифмированию. При потенцировании заданное основание возводится в степень выражения, над которым выполняется потенцирование. При этом суммы членов преобразуются в произведения сомножителей.

Доказательства основных формул логарифмов

Формулы, связанные с логарифмами вытекают из формул для показательных функций и из определения обратной функции.

Рассмотрим свойство показательной функции: $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$

Сделаем подстановки $p = \log_a x, \; q = \log_a y$:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$

Логарифмируем:

$$\log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

Или

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Рассмотрим свойство показательной функции: $(c^p)^q = (c^q)^p$

Сделаем подстановки: $a = c^p, \quad b = c^q$. Отсюда $p = \log_c a, \quad q = \log_c b$. Тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$a^q = b^p$$

Логарифмируем по основанию a:

$$\log_a a^q = q = \log_a b^p = p \log_a b$$

Или

$$q = p \log_a b$$

Подставляем $p = \log_c a, \quad q = \log_c b$

$$\log_c b = log_c a \cdot \log_a b$$

Или:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Полагая $c = b$, имеем:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{log_b a}$$

Задания для практического занятия:

1. Даны показательные функции: ;
1) $y = 2^x$; 2) $y = 3^{x-1}$; 3) $y = 0{,}5^{3x}$; 4) $y = 2 \bullet 4^{x+1}$; 5) $y = c \bullet a^x$.
Убедиться, что при значениях аргумента $x = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$, образующих простейшую арифметическую прогрессию, соответствующие значения функции y образуют геометрическую прогрессию.
В каждом случае найти знаменатель геометрической прогрессии.
2. Используя шаблон графика функции $y = a^x$ ($a > 1$), построить графики следующих функций: 1) $y = a^{-x}$; 2) $y = -a^x$.
3. Какие значения аргумента x являются допустимыми для функций:

$$\text{а) } y = a^x;\ \text{б) } y = a^{-x};\ \text{в) } y = a^{\frac{3}{x}};\ \text{г) } y = a^{\sqrt{x}};\ \text{д) } y = a^{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{е) } y = a^{\frac{3}{2x-3}}?$$

4. Какие из следующих степеней больше единицы, равны единице или меньше единицы:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}};\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}};\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{4}};\ \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{4}};\ (0{,}26)^{-0{,}5};\ \left(2\frac{3}{5}\right)^{0};$$

$$(0{,}15)^{0.3};\ (2{,}12)^{-0{,}5}?$$

5. Сравнить по величине числа m и n, если:
$(2/3)^m > (2/3)^n$; $(1\,2/3)^m < (1\,2/3)^n$; $(2{,}3)^m > (2{,}3)^n$; $(8/3)^m > (8/3)^n$; $(0{,}7)^m < (0{,}7)^n$; $(4/5)^m < (0{,}8)^n$;
6. Какое заключение можно сделать относительно показателя степени m, если:
а) $(0{,}2)^m = 1/25$; б) $(2/3)^m = 3/4$ в) $(2/3)^m = 4/3$; г) $10^m = 0{,}1$; д) $10^m = 35$; е) $(5/3)^m = 0{,}2$?
7. Какое заключение можно сделать относительно положительного основания a, если:

$$\text{а) } a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}};\quad \text{б) } a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{3}{4}};\quad \text{в) } a^{-0.2} > a^{1.2};\quad \text{г) } a^{-\frac{5}{6}} < a^{\frac{4}{3}}?$$

8. Пользуясь набором шаблонов графиков функций, решить графически следующие уравнения:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = x^3$;
4) $2^x = \sin x$;; 5) $2^x = \cos x$; 6) $2^x = -x^2 + 1$;
7) $-2^x = \sin x$; 8) $2^{-x} = \cos x$; 9) $2^{-x} = -x + 3$.

9. Пересекается ли логарифмическая кривая $\boldsymbol{y} = \log_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$;:
а) с осью $\boldsymbol{x}$; б) с осью $\boldsymbol{y}$?

10. Используя график функции $\boldsymbol{y} = \log_2\boldsymbol{x}$, найти логарифмы по основанию 2 чисел 0,5; 0,6; 0,7; 1,5; 2,3; 3,0.

Логарифмы каких чисел по основанию 2 равны 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5?

11. Исходя из графика функции $\boldsymbol{y} = \log_2 \boldsymbol{x}$, построить графики функций:
а) $\boldsymbol{y} = \log_2(\boldsymbol{x} - 1)$; в) $\boldsymbol{y} = \log_2 \boldsymbol{x}$; д) $\boldsymbol{y} = |\log_2 \boldsymbol{x}|$;
б) $\boldsymbol{y} = \log_2(\boldsymbol{x} + 2)$; г) $\boldsymbol{y} = \log_2 |\boldsymbol{x}|$; е) $\boldsymbol{y} = \log_2(-\boldsymbol{x})$.

12. Построить графики функций:
а) $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} \boldsymbol{x}$; в) $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} (\boldsymbol{x} + 2)$; д) $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} |\boldsymbol{x}|$;
б) $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} (\boldsymbol{x} - 1)$; г) $\boldsymbol{y} = |\log_{1/3} \boldsymbol{x}|$; е) $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} (-\boldsymbol{x})$.

13. На одном и том же рисунке построить графики функций
$\boldsymbol{y} = \log_3 \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \log_{1/3} \boldsymbol{x}$.

Практическое занятие №27, №28. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции их свойства и графики.

Цель:

– ознакомиться с понятием тригонометрических и обратных тригонометрических функций, их свойствами и графиками, овладеть техникой построения графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций, заданных различными способами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Тригонометрические функции. При построении тригонометрических функций мы используем *радианную* меру измерения углов. Тогда функция $y = \sin x$ представляется графиком (рис.19). Эта кривая называется *синусоидой*.

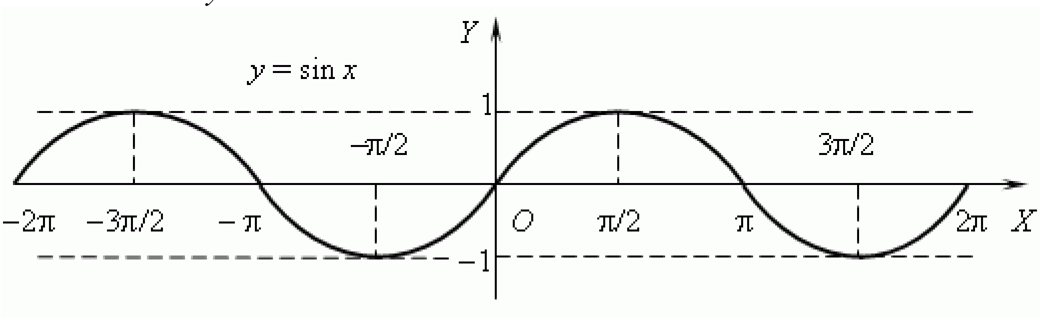


Рис. 19

График функции $y = \cos x$ представлен на рис.20; это также синусоида, полученная в результате перемещения графика $y = \sin x$ вдоль оси X влево на $\pi/2$.

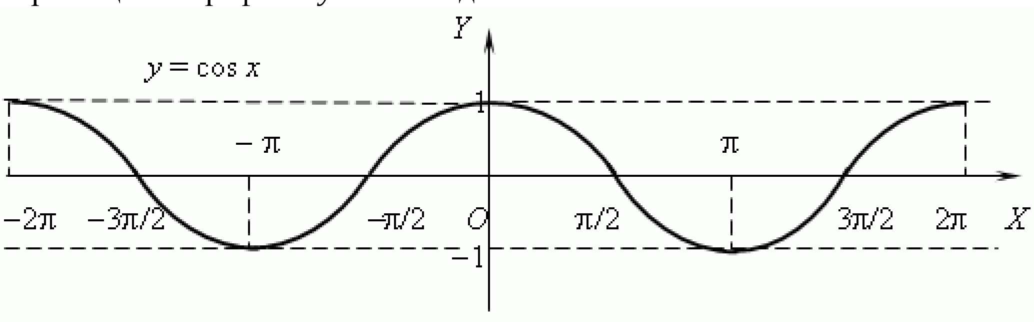
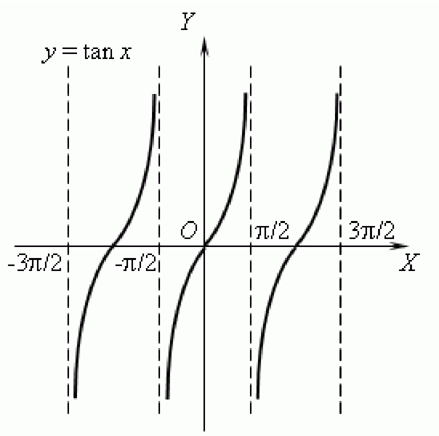


Рис. 20

Из этих графиков очевидны характеристики и свойства этих функций:

- область определения: $-\infty < x < +\infty$; область значений: $-1 \le y \le +1$;
  - эти функции периодические: их период 2π ;
- функции ограниченные ($|y| \le 1$), всюду непрерывные, не монотонные, но имеющие так называемые *интервалы монотонности*, внутри которых они ведут себя, как монотонные функции (см. графики рис.19 и рис.20);
- функции имеют бесчисленное множество нулей

Графики функций $y = \tan x$ и $y = \cot x$ показаны соответственно на рис.21 и рис.22



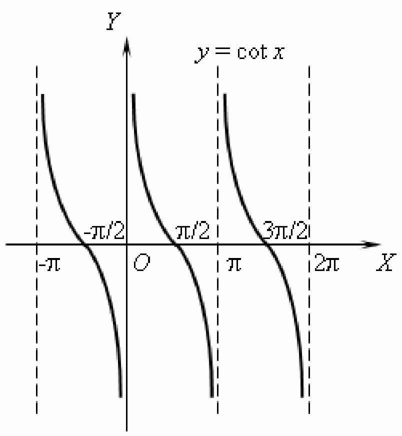


Рис. 21 Рис. 22

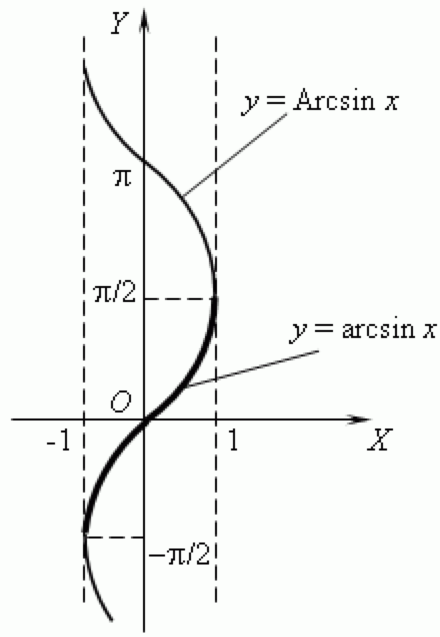
Из графиков видно, что эти функции: периодические (их период π), неограниченные, в целом не монотонные, но имеют интервалы монотонности (какие?), разрывные (какие точки разрыва имеют эти функции?).

Область определения и область значений этих функций:

для $y = \tan x$: $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $-\infty < y < +\infty$;

для $y = \cot x$: $x \neq \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $-\infty < y < +\infty$.

9. Обратные тригонометрические функции. .



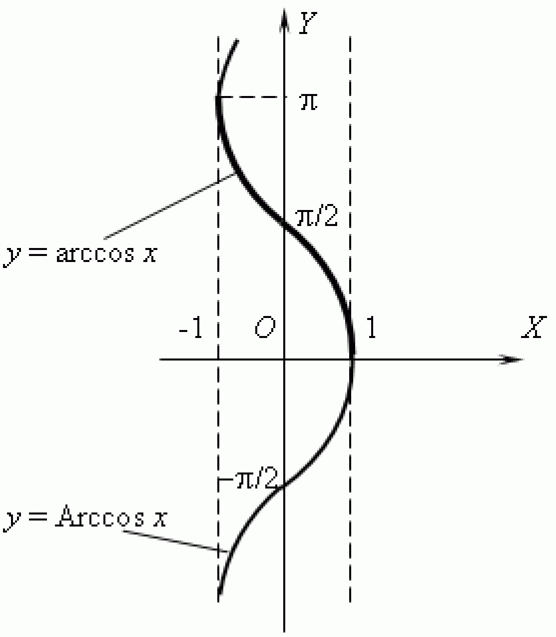


Рис. 23 Рис. 24

Функции y = Arcsin x (рис.23) и y = Arccos x (рис.24) многозначные, неограниченные; их область определения и область значений соответственно: $-1 \leq x \leq +1$ и $-\infty < y < +\infty$. Поскольку эти функции многозначные,не рассматриваемые в элементарной математике, в качестве обратных тригонометрических функций рассматриваются их главные значения: $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$; их графики выделены на рис.23 и рис.24 жирными линиями.

Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ обладают следующими характеристиками и свойствами:
- у обеих функций одна и та же область определения: $-1 \leq x \leq +1$;
  их области значений: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ для $y = \arcsin x$ и $0 \leq y \leq \pi$ для $y = \arccos x$;
- функции ограниченные, непериодические, непрерывные и монотонные
  ($y = \arcsin x$ – возрастающая функция; $y = \arccos x$ – убывающая);
- каждая функция имеет по одному нулю ($x = 0$ у функции $y = \arcsin x$ и

$x = 1$ у функции $y = \arccos x$).

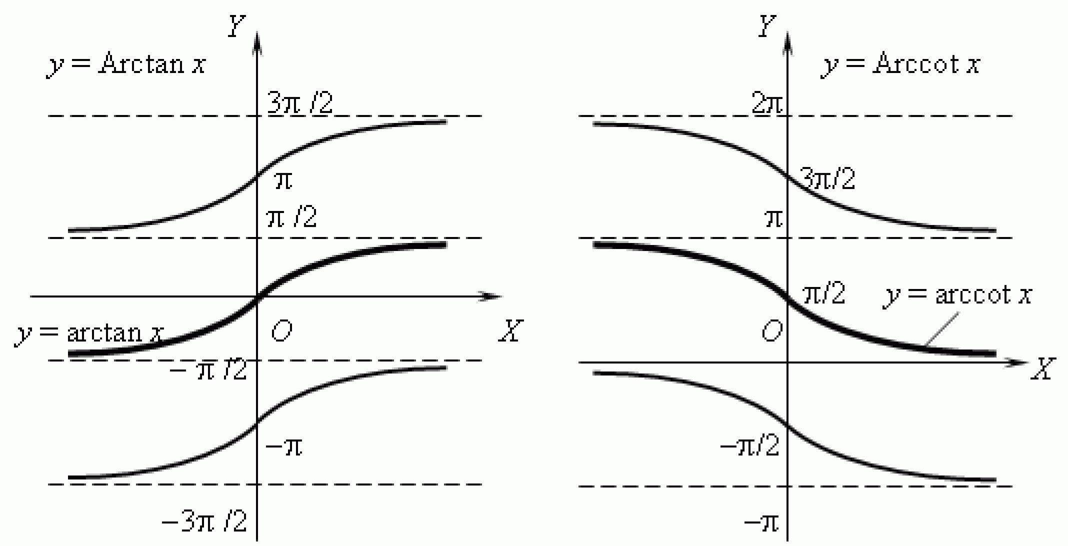


Рис. 25 Рис. 26

Функции y = Arctan x (рис.25) и y = Arccot x (рис.26) - многозначные, неограниченные; их область определения: $-\infty \le x \le +\infty$. Их главные значения $y = \arctan x$ и $y = \text{arccot}\, x$ рассматриваются в качестве обратных тригонометрических функций; их графики выделены на рис.25 и рис.26 жирными ветвями.

Функции $y = \arctan x$ и $y = \text{arccot}\, x$ имеют следующие характеристики и свойства:

- у обеих функций одна и та же область определения: $-\infty \le x \le +\infty$;
  их области значений: $-\pi/2 < y < \pi/2$ для $y = \arctan x$ и $0 < y < \pi$ для $y = \arccos x$;
- функции ограниченные, непериодические, непрерывные и монотонные
  ($y = \arctan x$ – возрастающая функция; $y = \text{arccot}\, x$ – убывающая);
- только функция $y = \arctan x$ имеет единственный ноль ($x = 0$);
  функция $y = \text{arccot}\, x$ нулей не имеет.

Задания для практического занятия:

1. Изобразить графики следующих функций

Функция 1.

1) Перенос y = cos x на влево по оси x.
2) Перенос вверх на 2 единицы по оси y.
3) Сжатие в 2 раза по оси x.
4) Симметрия относительно оси y.

Функция 2.

1) Растяжение y = sin x в 2 раза по оси y.
2) Перенос вверх на 2 единицы по оси y.
3) Симметрия относительно оси y.
4) Сжатие в 3 раза по оси x.

Функция 3.

1) Растяжение y = tg x в 2 раза по оси x.
2) Перенос вправо на π/4 по оси x.
3) Перенос вниз на 2 единицы по оси y.
4) Симметрия относительно оси x.

2. Построить графики функций:

1) $y = \cos x + 2$	2) $y = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2})$	3) $y = 3\cos\frac{1}{2}x + 2$
4) $y = \cos 2x$	5) $y = \frac{1}{2}\sin x - 1$	6) $y = -\frac{1}{2}\sin(-x) + 1$

Практическое занятие №29. Числовая последовательность. Способы задания и её суммирование.

Цель:

- ознакомиться с понятием числовая последовательность, её видами, способами задания и её суммированием, овладеть техникой вычисления членов последовательности, заданной формулой и способами изображения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Понятие числовой последовательности.

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

1, 2, 3, …, n – 1, n, п + 1, …

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n;

эта формула называется формулой общего члена.

2) Примеры числовых последовательностей.

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

3) Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

4) Свойства числовых последовательностей.

1.Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число M такое, что для любого п выполняется неравенство

$y_п \le M$

Число М называют верхней границей последовательности.

Пример: $-1, -4, -9, -16, \ldots, -п^2, \ldots$ - ограничена сверху 0.

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого п выполняется неравенство

$y_п \geq m$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, $п^2$, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

2.Периодичность последовательности

- Определение. Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное число T, что начиная с некоторого n, выполняется равенство $y_n = y_{n+T}$.

Число T называется длиной периода.

- Пример. Последовательность периодична с длиной периода $T = 2$.

3.Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$y_1<y_2<y_3<y_4< \dots <y_n<y_{n+1}< \dots$

Пример:1, 3, 5, 7, 9, 2п – 1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$y_1>y_2>y_3>y_4> \dots >y_n>y_{n+1}> \dots$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п – 1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными.

Задания для практического занятия:

1. Найти наибольший и наименьший члены последовательности
1; 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0; 2.
2. Вычислите первые пять членов последовательности, заданной формулой и изобразите их:$a_n = 2n - 1$

А) точками числовой оси;

Б) точками координатной оси;

3. Пусть n-й член числовой последовательности выражается формулой$a_n = n^2 + 2n + 1$:

А) напишите первые пять членов этой последовательности;

Б) являются ли числа 289, 361, 1000, 1225, 3025 членами этой последовательности, и если являются, то каковы их порядковые номера?

4. Изобразите точками числовой прямой последовательности, n-е члены которых равны:

А) $x_n = 5 + (-1)^n$

Б)$x_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

В)$x_n = \frac{2n+5}{3}$

5. Напишите первый, тридцатый, сороковой, сотый члены последовательностей, n –е члены которых равны:

А) $x_n = a + (n-1)d$

Б)$x_n = aq^{n-1}$

В)$x_n = \frac{3n-6}{10}$

Практическое занятие №30. Предел последовательности и предел функции. Основные теоремы о пределах.

Цель:

– ознакомиться с понятием предел последовательности и предел функции, основными теоремами о пределах, овладеть техникой вычисления предела последовательности и предела функции.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Понятие предела последовательности и предела функции.

Число А называется пределом числовой последовательности $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n=-1}}$, если для любого $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $\boldsymbol{n} > N$ выполняется неравенство: $|\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$

Число А называется пределом функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке x_0 (при стремлении x к x_0), если для любого $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ существует такое $\boldsymbol{\delta} > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta, x \to \boldsymbol{x_0}$выполняется неравенство $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$

Предел числовой последовательности $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n-1}}$, обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$ т.е. $\boldsymbol{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$, предел функции f(x) в точке x_0 при стремлении x к x_0, обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

2)Основные теоремы о пределах

Укажем те основные свойства пределов, которые будут использованы при решении задач. Обозначим через С некоторую постоянную.

Пусть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{C}, \lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{C})$

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}(\boldsymbol{x}), \lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n}, \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{d_n}$ существуют и конечные пределы:

$\lim\limits_{x\to a}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] \lim\limits_{x\to a}[\boldsymbol{C} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] \lim\limits_{x\to a}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) * \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$

$(\lim\limits_{x\to\infty}[\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}] \lim\limits_{x\to\infty}[\boldsymbol{C} * \boldsymbol{a_n}] \lim\limits_{x\to\infty}[\boldsymbol{a_n} * \boldsymbol{b_n}])$

Свойства пределов:

$$\lim_{x\to a}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = \lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \lim_{x\to a} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$$

$(\lim\limits_{x\to\infty}[\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}] = \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n} + \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{b_n})$

$$\lim_{x\to a}[\boldsymbol{C} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{C} * \lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (\lim_{x\to\infty}[\boldsymbol{C} * \boldsymbol{a_n}] = \boldsymbol{C} * \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n}$$

$$\lim_{x\to a}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) * \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = \lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \lim_{x\to a} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$$

$(\lim\limits_{x\to\infty}[\boldsymbol{a_n} * \boldsymbol{b_n}] \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n} * \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{b_n})$

$$\lim_{x\to a} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} \qquad (\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{b_n}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n}}{\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{b_n}})$$

Задания для практического занятия:

1. Исходя из определения предела последовательностей докажите, что при $n \to \infty$:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-2}{n} = 7$

В) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$

2. Пусть:

А) $x_n = 3$ при всех $n \in N$, докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 3$.

Б) $x_n = c$, с – некоторое число при всех $n \in N$, докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = c$.

3. Для каждой из следующих последовательностей напишите несколько первых членов , подберите число b , которое могло бы быть её пределом, и убедитесь, что число b является пределом последовательности (найдите n из неравенства $|x_n - b| < e$):

А) $\frac{1}{n^2}$;

Б) $\frac{2}{n+1}$;

В) $\frac{n}{n+1}$;

Г) $1-\frac{1}{n^2}$.

4. Докажите, что последовательности x_n сходятся, а y_n расходятся, если

А) $x_n = \frac{6n-3}{3n}$;

Б) $x_n = \frac{(-1)^n - 10}{n}$

В) $y_n = n$;

Г) $y_n = (-1)^n + 1$.

5.В следующих примерах, рассмотрев соответствующие таблицы значений функции для значений, близких к a, догадайтесь, какое число b может быть пределом функции. Проверьте это, используя определение предела:

А) $\lim\limits_{x\to 2} 7x$

Б) $\lim\limits_{x\to -1} (4x+2)$

В) $\lim\limits_{x\to 1} (4x-2)$

Г) $\lim\limits_{x\to -1} 10x^2$

Д) $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - 3x + 4)$.

6.Вычислите пределы функций:

А) $\lim\limits_{x\to 1} (6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 5)$

Б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5-3^{x+2}}{3+2^{x+3}}$

В) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-6}{2x+3}$

Г) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x+5}$

Д) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{7x^2+9x}{6x^2}$

Е) $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - x^2 - 10x - 3)$

Ж) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2+x+12}$

З) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x+6}{x+3}$

И) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{7x^5+x^6}{x^3+x^4}$.

Предел функции. Раскрытие основных неопределенностей и замечательные пределы.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Замечательные пределы.

Приведем некоторые замечательные пределы, которые будут использованы при решении задач:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = e$$

$$\lim_{x\to 0} [1 + a]^{1/a} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to \infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\qquad a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{1}{2}*x^2}$$

Решение типовых задач

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4+7\ldots(3n-2)}{4n^2}$$

РЕШЕНИЕ: при n- имеет неопределенность вида. В числителе выражения находится сумма членов арифметической прогрессии которая вычисляется по формуле.

В нашем случае $S_n=\frac{1+3n-2}{2}*n=\frac{3n-1}{2}*n=\frac{3n^2-n}{2}$

Следовательно $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7\ldots(3n-2)}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{Sn}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{8n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{8}=\frac{3}{8}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\frac{\sin n!}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Разделим числитель n на знаменатель n^2, после преобразования получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4x^4+6x+8}{3x^3+6x+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4x+\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{3+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty$$

Разделим числитель и знаменатель на x^3 т.к. при отношении$\frac{6}{x^2};\frac{2}{x^3};\frac{8}{x^3}\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{1}{3}$$

Разделим числитель и знаменатель на x и после преобразования будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2+5x+9}{6x^3+8x+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{6+\frac{8}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{6}=0$$

Разделим числитель и знаменатель на x^3

$$\lim_{n\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x-3}=\lim_{n\to 1}\frac{1-3+2}{1-4-3}=\frac{0}{-6}=0$$

$\lim_{n\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{n\to 3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\lim_{n\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{n\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$

Приведем выражение к общему знаменателю

$$\lim_{n\to 4}\frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4}=\begin{Bmatrix}x-5\sqrt{x}+6=0\\ D=25-24=1\end{Bmatrix}\left[\sqrt{x}=\frac{5+1}{2}=2\sqrt{x}=\frac{5+1}{2}=3\right]$$

$$=\lim_{n\to 4}\frac{(x-4)(x-9}{x-4}=\lim_{n\to 4}(x-9)=4-9=-5.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-x-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=-\frac{1}{2}$$

Умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное

$\lim_{n\to 0}\frac{tgax}{bx}=\lim_{n\to 0}\frac{\sin xa}{bx\cos axa}=\frac{a}{b}\lim_{n\to 0}\frac{sinax}{ax}*\lim_{n\to 0}\frac{1}{\cos ax}==\frac{a}{b}*1\frac{a}{b},$ потому что $\lim_{n\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$

первый знаменательный предел.

2) Основные неопределенности. Способы вычисления пределов

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

1. Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+5}{x+6}=\frac{8-4+5}{2+6}=\frac{9}{8}.$$

2. Если аргумент стремится к ∞ или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождения предела функции требует специального исследования.

Более сложные случаи нахождения предела функции $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}$ рассмотрим далее каждый в отдельности.

3. Если при $x \to a$ или $x \to\infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно больших функций $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Чтобы вычислить такие пределы, числитель и знаменатель дроби нужно разделить на старшую степень переменной x (в примерах x^3 и x соответственно, т.к. при $x \to\infty$ величины $1/x^3$, $1/x$ являются бесконечно малыми). После чего легко получаем результат.

Пример:

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{3-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{7}{x}}{\frac{3}{x}-4}=-\frac{5}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty$$

<u>Замечание</u>. Если в числителе и знаменателе стоят многочлены одной степени, то предел такой дроби при $x \to\infty$ равен отношению коэффициентов при старших степенях.

4. При $x \to a$ или $x \to\infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно малых функций $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Если необходимо вычислить предел дроби, числитель и знаменатель которой - многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x = a$, то оба многочлена нужно разложить на простые множители и сократить на $(x - a)$, а затем вычислить предел.

Задания для практического занятия.

Найдите пределы функций:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2+2x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$$

Практическое занятие №31. Производные основных элементарных функций.

Цель:

– ознакомиться с понятием производной функции, дифференцированием основных элементарных функций, таблицей производных основных элементарных функций, овладеть техникой нахождения производных основных элементарных функций.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Производная. Понятие производной функции.

Рассмотрим функцию y = f(x), которая определена на некотором интервале (a, b) и непрерывна на этом интервале. Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю. т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Производная обозначается $y'(x)$ или f′(x), или $\frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Функция называется дифференцированной в некоторой точке x, если в этой точке она имеет определенную производную и при этом функция будет непрерывной.

Таблица производных основных элементарных функций

1	y = c,	y′ = 0		
2	y = x,	y′= 1		
3	$y = x^n$,	$y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}\,u'$
4	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u\ln a}u'$
5	y = lnx	y′ = 1/x	y = lnu	y′ = u′/u
6	$y = a^x$,	$y' = a^x\ln a$	$y = a^u$,	$y' = a^u\ln a\; u'$
7	$y = e^x$,	$y' = e^x$	$y = e^u$,	$y' = e^u\,u'$
8	y = sinx,	y′ = cosx	y = sinu,	y′ = cosu u′
9	y = cosx,	y′ = -sinx	y = cosu,	y′ = -sinu u′
10	y = tgx,	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	y = tgu,	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
11	y = ctgx,	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	y = ctgu,	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
12	y=arcsinx,	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arcsinu,	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	y=arccosx	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arccosu	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	y=arctgx,	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	y=arctgu,	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
15	y=arcctgx,	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	y=arcctgu,	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найдите производную функции в точке x_0

$y = 3x^2,\ x_0 = 1$

Вариант 2

а) $y = 2x^3,\ x_0 = -1;$

$y = 2 + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

$y = 1 + 2\sqrt{x}$, $x_0 = 9$

2. Найдите производную функции:

$y = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$;

$y = x(x^2 - 5x + 1)$;

$y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$;

$y = \frac{x^2}{1 + x}$

а) $y = x^3 + 4x^2 - \frac{1}{x^2}$;

$y = x(x^3 + 4x^2 - 1)$;

$y = \frac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$;

$y = \frac{x}{1 + x^2}$

3. Продифференцировать сложную функцию:

$y = (x^2 - 3x + 1)^7$

$y = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

а) $y = (x^2 + 4x - 1)^6$;

$y = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$

4. Найдите производную функции:

$f(x) = \frac{2\cos x + \sin x}{3\sin x - \cos x}$;

$g(x) = 4ctg(1 - 3x - x \cdot \sin(3x - 1)$

а) $f(x) = \frac{2\cos x - 3\sin x}{1 + 4\cos x}$;

$g(x) = 3tg(5 - 2x) - x \cdot \cos(5 - 2x)$

5. Найдите, при каких значениях x производная функции равна нулю, если

$f(x) = x^2 - 2x - \lg(1 - 2x)$

$f(x) = x^2 - \lg(2x - 1)$

6. Дана функция. Выясните при каких значениях x, $f'(x) \succ 0$, если:

$f(x) = \frac{4^x - 3 \cdot 2^x}{\ln 2} + x$

$f(x) = \frac{2^x + 2^{1-x} + x \cdot \ln 2}{\ln 2}$

Геометрический и экономический смысл производной. Производные высших порядков.

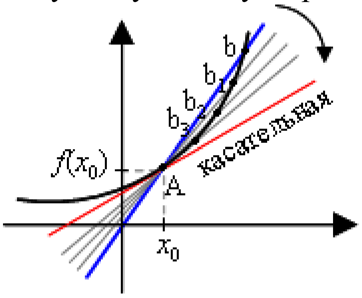
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1)Геометрический и экономический смысл производной.

Касательная – это прямая, проходящая через точку кривой и совпадающая с ней в этой точке с точностью до первого порядка (рис.1).

Другое определение: это предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$.

Пояснение: Возьмем прямую, пересекающую кривую в двух точках: A и b (см.рисунок). Это секущая. Будем поворачивать ее по часовой стрелке до тех пор, пока она не обретет только одну общую точку с кривой. Так мы получим касательную.



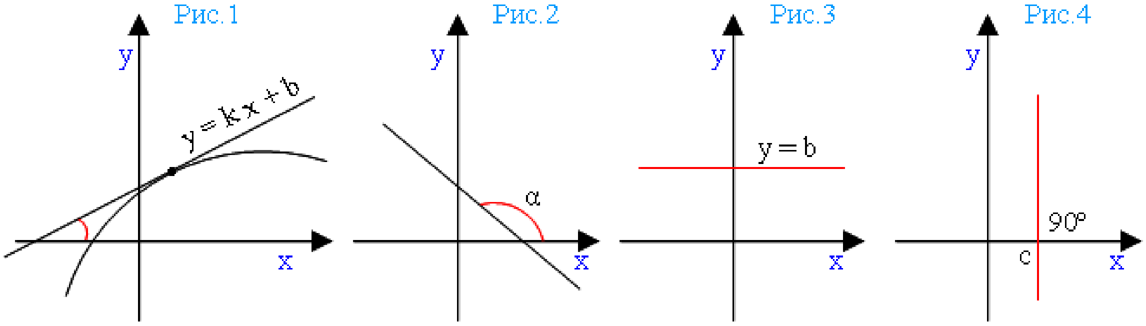
(рис.1)

Строгое определение касательной:

Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$. Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является угловым коэффициентом этой прямой.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс: $k = \operatorname{tg} \alpha$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется углом наклона прямой (рис.1 и 2).



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид $y = b$ (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90º ($\pi/2$), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:
$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_o)$.
2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_o)$.
3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f'(x_o)$ в уравнение касательной и решить его.

Пример: Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Следуем алгоритму.

1) Точка касания x_o равна 2. Вычислим $f(x_o)$:
$f(x_o) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит: $f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x$.

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_o)$:
$f'(x_o) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$.

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_o = 2$, $f(x_o) = 1$, $f'(x_o) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:
$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7$.

Ответ: $y = 4x - 7$.

2)Производные высших порядков.

Производные второго порядка, или второй производной y'', функции называется производная от её производной:

$$y'' = (y')'$$

Вторая производная также может быть обозначена символами
$f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяется и обозначается производная третьего порядка:

$$y''' = (y'')'.$$

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например:

$$f^{(4)}(x), f^{(IV)}(x).$$

Производной n-го порядка называется производная от производной (n-1) го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Задания для практического занятия:

1) Найти вторые производные:

а)$y = 4x^2 - 2x + 3$; б) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$;в) $y = x + \sqrt{4-x}$
г) $y = cos^2 x$.

2) Найти производные третьего порядка от функций:

а) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ б)$y = \frac{2x-1}{4x+1}$
в) $y = tgx + 2x \cdot sinx$г) $y = \sqrt{x+5}$.

3) Найти производные четвёртого порядка от функций:

а) $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 7$
б)$y = x2^x$
в) $y = x \cdot \log_2 x$
г)$y = sinx$

4) Найти производные n –ого порядка от функций:

А)$y = 2^x$
Б)$y = lnx$

1. а) Найдите координаты точек, в которых касательные к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, имеющие угловой коэффициент -1, пересекают ось абсцисс.

б). Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-3}{x+3}$, имеющих угловой коэффициент 9.

2. а)Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$

б). Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке графика с ординатой 2.

3. а)Выясните, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $y = 4x^3$.

б)Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = \ell^x$.

Практическое занятие №32. Исследование функции с помощью первой производной.
Цель:

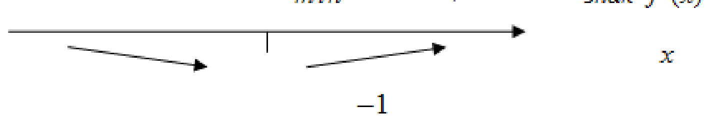
- ознакомиться с основными свойствами функций, схемой исследования функции с помощью производных, овладеть техникой исследования функций с помощью производных.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Алгоритм исследования и построения графиков функций
Из изложенного ранее материала следует следующая схема исследования функции с помощью производных:
1. Находят область определения функции. При наличии точек разрыва II рода изучают поведение функции в их малой окрестности, т.е. вычисляют лево- и правосторонние пределы. При задании функции словесным образом также вычисляют лево- и правосторонние пределы для граничных точек интервалов, на которых функция описывается разными формулами.
2. Находят точки пересечения с координатными осями.
3. Определяют четная, нечетная или общего вида заданная функция.
4. Определяют периодическая или непериодическая заданная функция.
5. Находят критические точки, решая уравнение $f'(x)=0$, и определяют точки, в которых первая производная функции не существует. Точки откладывают на числовой оси и определяют знак первой производной на каждом интервале, определяя тем самым интервалы возрастания ($f'(x)>0$) и убывания ($f'(x)<0$) функции. Используя первый достаточный признак существования экстремума, находят точки экстремума и вычисляют значение функции в этих точках.
6. Результаты исследования заносят в сводную таблицу.

1) **Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах**

*Пример*Исследовать функцию $f(x)=xe^{x}$ с помощью второй производной:
Используя схему исследования графика функции с помощью производных, найдем:
1. $D(y): x\in R$.
2. Найдем точки пересечения графика функции с координатными осями
Ox: $f(x)=0 \Rightarrow xe^{x}=0 \Rightarrow x=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью абсцисс;
Oy: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0e^{0}=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью ординат.
3. Вычислим $f(-x)=-xe^{-x}\neq \pm f(x)$ – функция общего вида.
4. Функция непериодическая.
5. Найдем первую производную функции $f'(x)=(1+x)e^{x}$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем критические точки, решая уравнение $f'(x)=(1+x)e^{x}=0 \Rightarrow x=-1$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак



первой производной на каждом интервале
Из рисунка видно, что $f(x)\downarrow \forall x\in(-\infty;\,-1)$ и $f(x)\uparrow \forall x\in(-1;\,\infty)$. Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в этой точке наблюдается минимум. Вычислим значение функции в минимуме $f_{min}(-1)=-1\cdot e^{-1}\approx -0{,}37$.
6. Построим сводную таблицу

Интервал	$-\infty;\,-2$	-2	$-2;\,-1$	-1	$-1;\,\infty$

$f'(x)$	$\downarrow$		$\downarrow$	0	$\uparrow$
$f(x)$	$\downarrow\ \cap$	$\approx -0{,}27$	$\downarrow\ \cup$	$\approx -0{,}37$	$\uparrow\ \cup$

$O(0;\,0)$ – точка пересечения с координатными осями.

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Задания для практического занятия:

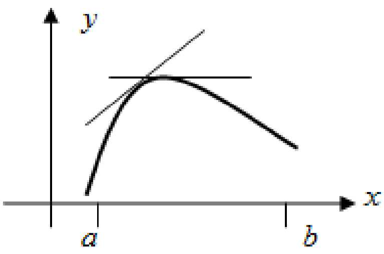
Исследовать функции с помощью первой производной:

1) $y = x - \frac{1}{2}x^2$
2) $y = 3x^4 - 4x^3$
3) $y = (x-1)(x+1)^3$
4) $y = x^2(2-x)^2$
5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$
6) $y = \sqrt{9x^2 - 1}$
7) $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

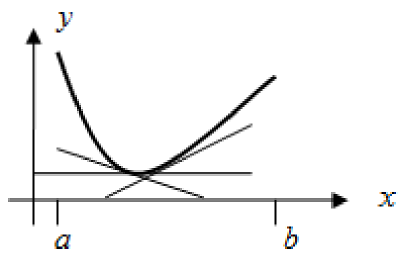
Практическое занятие №33. Применение производной к исследованию функций и построения графиков функций.
Цель:
- ознакомиться с основными свойствами функций, схемой исследования функции с помощью производных, овладеть техникой исследования функций с помощью производных и построения графиков функций.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Точки перегиба.
Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
Опр. График функции $f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;b)$, если он лежит ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале.



Опр. График функции $f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;b)$, если он лежит выше любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале.
Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции на том или ином интервале определяются теоремой:



Т. Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ существует и положительна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет вогнутым. Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ существует и отрицательна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет выпуклым.

<u>*Пример*</u> Определить интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $f(x)=e^x$.

Найдем вторую производную от заданной функции $f''(x)=e^x$. В силу того, что $f''(x)=e^x>0\ \forall x\in R$, то график функции $f(x)=e^x$ будет вогнутым на всей числовой оси.

<u>*Пример*</u> Определить интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $f(x)=x^3$.
Найдем вторую производную от заданной функции $f''(x)=6x$. В силу того, что $f''(x)=\begin{cases}<0 & \text{при } x<0;\\ >0 & \text{при } x>0\end{cases}$, то график функции $f(x)=x^3$ будет выпуклым при отрицательных значениях аргумента и вогнутым при положительных значениях аргумента.
Опр. Точка, отделяющая вогнутую часть графика функции от выпуклой (или выпуклую часть графика функции от вогнутой), называется точкой перегиба.
Выясним необходимые и достаточные условия существования точек перегиба.
Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
Рассмотрим необходимое условие существования точки перегиба.
Т. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, содержащем точку перегиба x_p, то в точке перегиба вторая производная равна нулю, т.е. $f''(x_p)=0$.

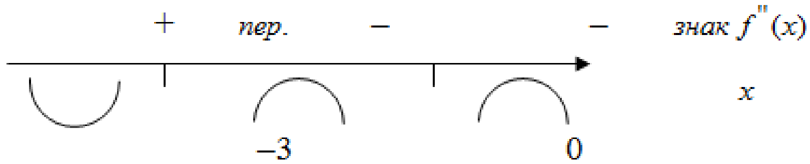
Обращение в нуль второй производной функции в точке перегиба является необходимым, но не достаточным условием существования такой точки на графике функции.

Если вычислить вторую производную от заданной функции, то она будет равна $f''(x)=12x^2$.
Если приравнять это выражение к нулю, то получим, что точка $x_p=0$ должна быть точкой

перегиба графика функции $f(x) = x^4$. Однако график этой функции на всей числовой оси является вогнутым, т.е. точка $x_p = 0$ не является точкой перегиба графика функции $f(x) = x^4$.В связи с этим рассмотрим достаточное условие существования точки перегиба.
Т. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, вторая производная которой в точке x_p, принадлежащей этому интервалу, обращается в нуль ($f''(x_p) = 0$) или не существует. Если при переходе через точку x_p вторая производная функции меняет свой знак, то точка x_p определяет точку перегиба графика функции $f(x)$.

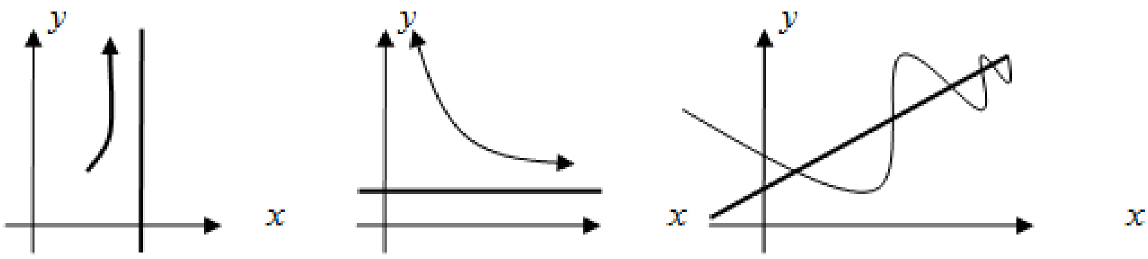
Пример Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$.

Найдем вторую производную заданной функции $f''(x) = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$. Найдем точки подозрительные на перегиб: а) $f''(x) = 0 \Rightarrow x \notin R$ б) $f''(x)$ – не существует $\Rightarrow$ знаменатель дроби обращается в ноль при $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$. Отложим эти точки на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале:



Из рисунка видно, что точка $x_2 = -3$ является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная изменяет свой знак. Точка $x_1 = 0$ не является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная не изменяет своего знака.
Асимптоты графика функции $f(x)$.
В большинстве практических случаев необходимо знать поведение функции при неограниченном росте (убыли) аргумента. Одним из наиболее интересных случаев, которые возникают при таком исследовании, является случай, когда график функции неограниченно приближается к некоторой прямой.
Опр. Прямая (l): $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $f(x)$, если расстояние от переменной точки графика до этой прямой стремится к нулю при стремлении аргумента $x \to \pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - y| = 0$.

График функции может приближаться к асимптоте сверху, снизу, слева, справа или колеблясь возле этой прямой.



Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
Опр. Вертикальная прямая $x = x_{ac}$ называется вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to x_{ac}\pm 0} f(x) = \pm\infty$. Горизонтальная прямая $y = y_{ac}$ называется горизонтальной асимптотой, если

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_{ac}$. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой (параметр $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и параметр $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ отличаются от $\pm\infty$ и $k \neq 0$).

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты: если $k = 0$, то наклонная асимптота вырождается в горизонтальную $y = b$, при условии, что $b \neq \pm\infty$. Если параметр $b = \pm\infty$, то горизонтальной асимптоты нет.

Применение производной к исследованию функций и построения графиков функций.

Полная схема исследования функции с помощью производных.

Из изложенного ранее материала следует следующая схема исследования функции с помощью производных:

1. Находят область определения функции. При наличии точек разрыва II рода изучают поведение функции в их малой окрестности, т.е. вычисляют лево- и правосторонние пределы. При задании функции словесным образом также вычисляют лево- и правосторонние пределы для граничных точек интервалов, на которых функция описывается разными формулами.
2. Находят точки пересечения с координатными осями.
3. Определяют четная, нечетная или общего вида заданная функция.
4. Определяют периодическая или непериодическая заданная функция.
5. Находят критические точки, решая уравнение $f'(x) = 0$, и определяют точки, в которых первая производная функции не существует. Точки откладывают на числовой оси и определяют знак первой производной на каждом интервале, определяя тем самым интервалы возрастания ($f'(x) > 0$) и убывания ($f'(x) < 0$) функции. Используя первый достаточный признак существования экстремума, находят точки экстремума и вычисляют значение функции в этих точках.
6. Находят точки подозрительные на перегиб, решая уравнение $f''(x) = 0$, и определяют точки, в которых вторая производная функции не существует. Точки откладывают на числовой оси и определяют знак второй производной на каждом интервале, определяя тем самым интервалы вогнутости ($f''(x) > 0$) и выпуклости ($f''(x) < 0$) функции. Используя достаточный признак существования точки перегиба, находят точки перегиба и вычисляют значение функции в этих точках.
7. Находят асимптоты графика функции.
8. Результаты исследования заносят в сводную таблицу.
9. По данным таблицы строят схематичный график функции.

<u>*Пример*</u>Исследовать и построить схематичный график функции $f(x) = xe^x$.

Используя схему исследования графика функции с помощью производных, найдем:

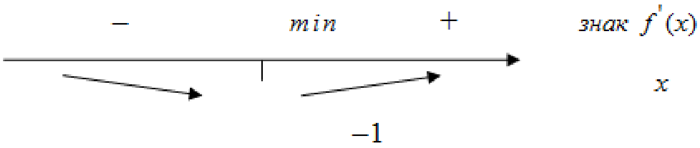
1. $D(y): x \in R$.
2. Найдем точки пересечения графика функции с координатными осями

Ox: $f(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью абсцисс;

Oy: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0e^0 = 0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью ординат.

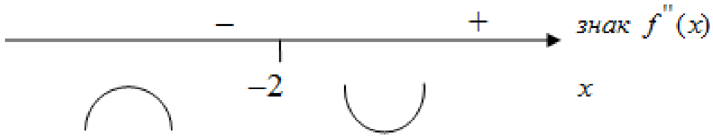
3. Вычислим $f(-x) = -xe^{-x} \neq \pm f(x)$ – функция общего вида.
4. Функция непериодическая.
5. Найдем первую производную функции $f'(x) = (1 + x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем критические точки, решая уравнение

$f'(x) = (1+x)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак первой производной на каждом интервале



Из рисунка видно, что $f(x)\downarrow\ \forall x \in (-\infty;\,-1)$ и $f(x)\uparrow\ \forall x \in (-1;\,\infty)$. Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ первая производная меняет свой знак с "–" на "+", то в этой точке наблюдается минимум. Вычислим значение функции в минимуме $f_{min}(-1) = -1\cdot e^{-1} \approx -0{,}37$.

6. Найдем вторую производную функции $f''(x) = (2+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем точки, подозрительные на перегиб, решая уравнение $f''(x) = (2+x)e^x = 0 \Rightarrow x = -2$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале



Из рисунка видно, что $f(x)\cap\ \forall x \in (-\infty;\,-2)$ и $f(x)\cup\ \forall x \in (-2;\,\infty)$. Так как при переходе слева направо через точку $x=-2$ вторая производная меняет свой знак, то в этой точке наблюдается точка перегиба. Вычислим значение функции в точке перегиба $f_{пер}(-2) = -2\cdot e^{-2} \approx -0{,}27$.

7. Найдем асимптоты графика функции, для чего вычислим угловой коэффициент прямой $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^x = \begin{cases}\infty, & при\ \ x\to\infty;\\ 0, & при\ \ x\to-\infty\end{cases}$. Таким образом, при $x\to\infty$ асимптот нет, а при $x\to-\infty$ возможна горизонтальная асимптота. Вычислим параметр $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x - 0\cdot x) = 0$. Следовательно, график заданной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = = 0$.

8. Построим сводную таблицу

Интервал	$-\infty;\,-2$	-2	$-2;\,-1$	-1	$-1;\,\infty$
$f'(x)$	$\downarrow$		$\downarrow$	0	$\uparrow$
$f''(x)$	$\cap$	0	$\cup$		$\cup$
$f(x)$	$\downarrow\ \cap$	$\approx -0{,}27$	$\downarrow\ \cup$	$\approx -0{,}37$	$\uparrow\ \cup$

$O(0;\,0)$ – точка пересечения с координатными осями.

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

9. Построим схематичный график функции, выбрав по координатным осям разные масштабы измерения

Задания для практического занятия:

1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции:

а) $y = x^4 - 6x^2 + 4$

2. Найти точки перегиба функции:

а) $y = x^5 - 80x^2$ б) $y = \cos x$, $-\pi < x < \pi$

3.Исследовать функции и построить их графики с помощью производной:

4) $y = x - \frac{1}{2}x^2$

5) $3x^4 - 4x^3$

6) $y = (x-1)(x+1)^3$

4) $y = x^2(2-x)^2$
5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$
6) $y = \sqrt{9x^2 - 1}$
7) $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

Практическое занятие № 34. Вычисление неопределенных интегралов.
Цель:
- ознакомиться с понятием первообразной функции, понятием неопределенного интеграла, его свойствами, таблицей неопределенных интегралов,

овладеть техникой интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

1) Понятие первообразной функции. Теорема о первообразных.
Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной f'(x) или дифференциала df=f'(x)dx функции f(x). В интегральном исчислении решается обратная задача. По заданной функции f(x) требуется найти такую функцию F(x), что F'(x)=f(x) или dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.
Таким образом, основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции F(x) по известной производной (дифференциалу) этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д..
Определение. Функция F(x), $x \in X \subset R$, называется первообразной для функции f(x) на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и F'(x)=f(x) или dF(x)=f(x)dx.
Теорема. Любая непрерывная на отрезке [a; b] функция f(x) имеет на этом отрезке первообразную F(x).
Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции f(x) на множестве x , то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т. е. $F_2(x)=F_1x)+C$, где C – постоянная.

2) Неопределенный интеграл, его свойства.
Определение. Совокупность F(x)+C всех первообразных функции f(x) на множестве X называется неопределенным интегралом и обозначается:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ - (1)

В формуле (1) f(x)dx называется подынтегральным выражением, f(x) – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, а C – постоянной интегрирования.
Рассмотрим свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1. Производная из неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$ и $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$\int dF(x) = F(x) + C.$

3. Постоянный множитель a (a≠0) можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx.$

5. Если F(x) – первообразная функции f(x), то:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

6 (инвариантность формул интегрирования). Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C,$$

где u – дифференцируемая функция.

3) Таблица неопределенных интегралов.

Приведем основные правила интегрирования функций.

I. $\left(\int f(u)du\right)' = f(u).$

II. $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du$

III. $\int dF(u) = F(u)+C.$

IV. $\int af(u)du = a\int f(u)du.$

V. $\int (f_1(u) \pm f_2(u) \pm ... \pm f_n(u))du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u) \pm ... \pm \int f_n(u)du.$

VI. $\int f(au+b)du = \frac{1}{a}F(au+b)+C.$

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов. (Отметим, что здесь, как и в дифференциальном исчислении, буква u может обозначать как независимую переменную (u=x), так и функцию от независимой переменной (u=u(x)).)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ (n≠-1).

2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$ (a>0, a≠1).

3. $\int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C.$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u du = \sin u + C.$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

9. $\int shudu = chu + C.$

10. $\int chudu = shu + C.$

11. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C.$

12. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C.$

13. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$

14. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C$ (a≠0).

15. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ (a≠0).

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}|+C$ (|u| > |a|).

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$ (|u|< |a|).

Интегралы 1 – 17 называют табличными.

Некоторые из приведенных выше формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Задания для практического занятия:

А) $\int (x^7 + 4x)dx$

Б)$\int \frac{2+x^2}{x} dx$

В)$\int (4x+3)^2\, dx$

Г) $\int (2x^2 - cosx)dx$

Д)$\int (3x-8)dx$

Е)$\int (2+3sinx)dx$

Ж)$\int (a^x + \frac{3}{1+x^2})dx$

З)$\int (\frac{3}{sin^2x} + \frac{1}{x})dx$

И)$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$

К)$\int \sqrt{2x+3}\, dx$

Л) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

М)$\int \frac{sinxdx}{\sqrt{cosx}}$

Н)$\int \frac{sin2x}{3sinx} dx$

О)$\int e^{3x} \cdot 3^x\, dx$

П) $\int \frac{dx}{sin^2 3x}$

Р)$\int (2x-3)^{10}\, dx$

С)$\int cos(\frac{1}{2} + 2x)dx$

Т)$\int sin^2 x \cdot cosx\, dx$

Методы интегрирования.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Основные методы интегрирования:

1) Метод непосредственного интегрирования.

Данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или подынтегрального выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2)Интегрирование подстановкой (замена переменной). Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле x=φ(t), откуда dx=φ'(t)dt.

Теорема. Пусть функция x=φ(t) определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция f(x). Тогда если на множестве X функция f(x) имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$ - (2)

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

3) Интегрирование по частям. Метод интегрирования по частям следует из формулы дифференциала произведения двух функций. Пусть u(x) и v(x) – две дифференцируемые функции переменной x. Тогда: d(uv)=udv+vdu. – (3)

Интегрируя обе части равенства (3), получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$

Но так как $\int d(uv) = uv + C$, то: $\int udv = uv - \int vdu.$ - (4)

Соотношение (4) называется формулой интегрирования по частям. С помощью этой формулы отыскание интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы (4) более прост для вычисления, нежели исходный.

В формуле (4) отсутствует произвольная постоянная C, так как в правой части этой формулы стоит неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную.

Приведем некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$ ($P_n(x)$ – многочлен степени n, k – некоторое число). Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу (4) n раз.

II. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)arctgxdx$, $\int P_n(x)arcctgxdx$ (Pn(x) – многочлен степени n относительно x). Их можно найти по частым, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

III. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$ (a, b – числа). Они вычисляются двукратным интегрированием по частям.

4) Примеры:

Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{8}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}} + C = \frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{x\sqrt{8}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + C\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2\cdot(2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2}}}\cdot\left(x\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{8}{7}x^2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{7}(7-8x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7-8x^2}} = \frac{1}{7-8x^2}$$ - верно.

2) $\int \frac{1+\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}dx$.

Решение:

$$\int \frac{1+\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+2\cos^2 x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C\right)' = \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$$ - верно.

3) $\int \frac{2x\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}dx$.

Решение:

$$\int\frac{2x\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{2x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int 2xdx+\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x}=x^2+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=$$
$$=x^2+\int\frac{1}{\sin^2 x}-\int dx=x^2-ctgx-x+C.$$

Проверка:

$$\left(x^2-ctgx-x+C\right)'=2x-1+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{2x\sin^2 x-\sin^2 x+1}{\sin^2 x}=\frac{2x\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$ - верно.

4) $\int\frac{e^{2x}}{e^x-e^{-x}}dx$.

Решение:

$$\int\frac{e^{2x}}{e^x-e^{-x}}dx=\left|\begin{aligned}&e^x=t\\&x=\ln t\\&dx=\frac{1}{t}dt\end{aligned}\right|\frac{e^{2x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}}{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}=\int\frac{t^2\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}dt=\int\frac{tdt}{\frac{t^2-1}{t}}=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$
$$=\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=\int\frac{t^2-1}{t^2-1}dt+\int\frac{1}{t^2-1}dt=t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C=e^x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+C.$$

Проверка:

$$\left(e^x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+C\right)'=e^x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'+C'=e^x+\frac{e^x+1}{2\left(e^x-1\right)}\cdot$$
$$\cdot\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=e^x+\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}\cdot\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=$$
$$=e^x+\frac{(e^x+1)(e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x)}{2(e^x-1)(e^x+1)^2}=e^x+\frac{2e^x}{2(e^x-1)(e^x+1)}=e^x+\frac{e^x}{e^{2x}-1}=\frac{e^x(e^{2x}-1)+e^x}{e^{2x}-1}=$$
$$=\frac{e^{3x}-e^x+e^x}{e^{2x}-1}=\frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}=\frac{e^{2x}}{e^x-e^{-x}}$$ - верно.

5) $\int(3^x+5^{2x})dx$.

Решение:

$$\int(3^x+5^{2x})dx\int 3^x dx+\int 5^{2x}dx=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{25^x}{\ln 25}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{25^x}{\ln 25}\right)'=\frac{3^x\ln 3}{\ln 3}+\frac{25^x\ln 25}{\ln 25}=3^x+25^x=3^x+5^{2x}$$ - верно.

6) $\int\frac{1+\ln x}{x}dx$.

Решение:

$$\int\frac{1+\ln x}{x}dx=\left|\begin{aligned}&\ln x=t\\&\frac{1}{x}dx=dt\end{aligned}\right|=\int\left(1+t\right)dt=\int dt+\int tdt=t+\frac{t^2}{2}=\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1+\ln x}{x}$$ - верно.

7) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Решение:

$$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \arccos x = t \\ -\dfrac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{array} \right| = -\int t^3 dt - (-\arccos x) =$$

$$-\frac{t^4}{4} + \arccos x = -\frac{\arccos^4 x}{4} + \arccos x + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{\arccos^4 x}{4} + \arccos x + C \right)' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4 \arccos^3 x}{-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ - верно.}$$

8) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x}}$.

Решение:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x}} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Проверка:

$$(-\ln|\cos x| + C)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = tgx = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} \text{ - верно.}$$

9) $\int arctg\sqrt{2x-1} dx$.

Решение:

$$\int arctg\sqrt{2x-1} dx = \left| \begin{array}{l} arctg\sqrt{2x-1} = U, du = \dfrac{1}{1+2x-1} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}} \\ dx = du, x = v \end{array} \right| =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \int x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} dx = xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = xarctg\sqrt{2x-1} -$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{2x-1} + C.$$

10) $\int (7x-10)\sin 4x dx$.

Решение:

$$\int (7x-10)\sin 4x dx = \left| \begin{array}{l} \sin 4x dx = dv, v = -\dfrac{1}{4}\cos 4x \\ 7x - 10 = U, du = 7dx \end{array} \right| = (7x-10)\left(-\frac{1}{4}\cos 4x \right) - \int -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot 7 =$$

$$= -\frac{7x-10}{4}\cos 4x + \frac{7}{4}\int \cos 4x dx = -\frac{7x-10}{4}\cos 4x + \frac{7}{8}\sin 4x + C.$$

11) $\int \ln(4x^2+1) dx$.

Решение:

$$\int \ln(4x^2+1) dx = \left| \begin{array}{l} \ln(4x^2+1) = 4, du = \dfrac{8x}{4x^2+1} \\ dx = dv, v = x \end{array} \right| = x\ln(4x^2+1) - \int x \cdot \frac{8x}{4x^2+1} = x\ln(4^2+1) -$$

$$-2\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x\ln(4x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x\ln(4x^2+1) - 2x + 2arctgx + C.$$

12) $\int \frac{(e^x+2)e^x}{e^{2x}+2}dx$.

Решение:

$$\int \frac{(e^x+2)e^x}{e^{2x}+2}dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt, \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{(t+2)}{t^2+2}dt = \int \frac{t}{t^2+2}dt + \int \frac{2}{t^2+2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+2\right| + 2\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+t\right| + \sqrt{2}arcctg\frac{e^x}{\sqrt{2}} + C.$$

Задачи для практического занятия:

1. Найти неопределённые интегралы (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

1.1. $\int x^3(3x+1)^2 dx$

1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$

1.3. $\int \frac{4x^3+x^4--8x^5}{x^3}dx$

1.4. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{1}{3}}}{x}dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x}dx$

1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$

1.7. $\int \frac{3}{1+x^2}dx$

1.8. $\int \left(e^x+2x-4^x+3x^{\frac{1}{2}}\right)dx;$

1.9. $\int \frac{2\cos^3 x+5}{\cos^2 x}dx$

1.10. $\int \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-6\cos x dx$

1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2 dx$

1.12. $\int \frac{x^2-3x^3+2x^7}{x}dx$

1.13. $\int \frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2}dx$

1.14. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{3}}}{x}dx$

1.15. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$

1.16. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

1.17. $\int \frac{5}{25+x^2}dx$

1.18. $\int \left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx;$

1.19. $\int \frac{2\cos^2 x-4}{\cos^2 x}dx$

1.20. $\int \frac{1}{2}\sin x+\sqrt[4]{x^7}dx$

1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$

1.22. $\int \frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2}dx$

1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x}dx$

1.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}}{x}dx$

1.25. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.26. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

1.27. $\int \frac{2}{2+3x^2}dx$

1.28. $\int \frac{2\sin^3 x+3}{\sin^2 x}dx$

1.29. $\int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

1.30. $\int (1-x)(2-\sqrt{x})dx$

2. Найти неопределённые интегралы (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$

2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}dx$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2+3}dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}}dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}}dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2-4}dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}}dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2-3}dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}dx$

2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx$

2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}dx$

2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}}dx$

2.15. $\int \frac{1}{2x^2+7}dx$

2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

2.17. $\int \frac{1}{3x^2+2}dx$

2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}}dx$

2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2-7}dx$

2.20. $\int \frac{1}{8x^2+9}dx$

2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$

2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3}dx$

2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}dx$

2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.25. $\int \frac{1}{4x^2-3}dx$

2.26. $\int \frac{2}{4+3x^2}dx$

2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}dx$

2.28. $\int \frac{1}{4x^2+7}dx$

2.29. $\int \frac{1}{8x^2-9}dx$

2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}}dx$

Практическое занятие №35. Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

Цель:

- ознакомиться с понятием определенного интеграла, его свойствами, основными методами интегрирования, применением определённого интеграла для вычисления площадей фигур, овладеть техникой интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр.

Если F(x) - первообразная функции *f(x)* , то разность F(b) - F(a) называется определённым интегралом от функции *f(x)* на отрезке [a ; b] и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

a – нижний предел интегрирования

b - верхний предел интегрирования

f(x)- подынтегральная функция

Правило вычисления определённого интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ Формула Ньютона – Лейбница

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\, x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\, x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \mathrm{arctg}\, x$

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p,\ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx+b},\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b) + C$
$e^{kx-b},\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx-b} + C$
$\sin(kx+b),\ k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b),\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$

Примеры:

Задача 1 **Вычислить интеграл** $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx.$

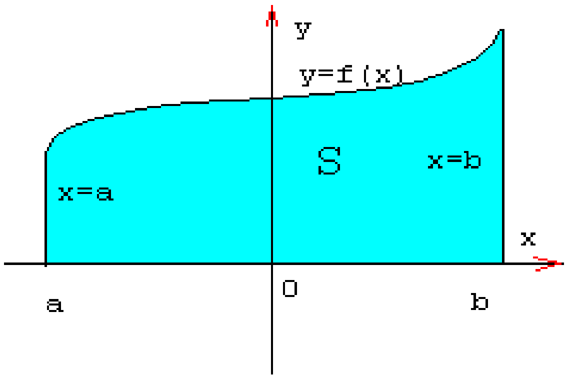
► **Одной из первообразных функции** $x - 1$ **является функция** $\frac{x^2}{2} - x$. **Поэтому** $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 2

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}+1\right)\ -\left(-\frac{1}{3}-1\right)=1\frac{1}{3}-\left(-1\frac{1}{3}\right)=1\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$$

Применение определённого интеграла для вычисления площадей фигур

Фигура, изображённая на рисунке является криволинейной трапецией



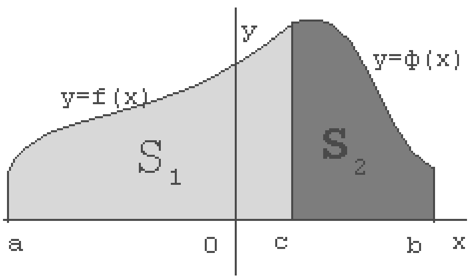
<u>Определение</u>

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной функции *y=f(x)*, снизу отрезком [a;b] оси Ox, а с боков отрезками прямых *x=a, x=b*

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

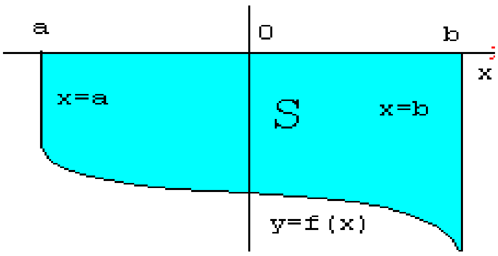
Возможно такое расположение:



$S = S_1 + S_2$

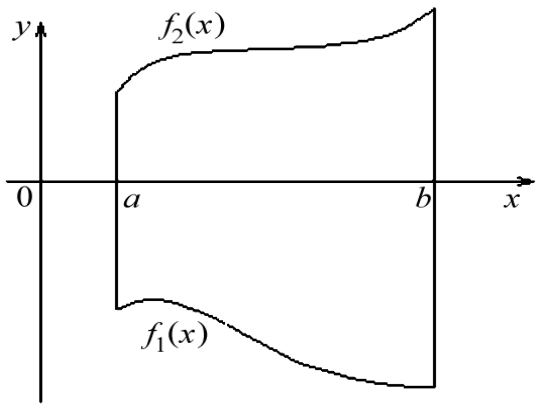
$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \phi(x)\,dx$$

Возможен следующий случай, когда *f(x)*< 0 на [a,b]



$$S=\int_a^b -f(x)\,dx$$

Возможно и такое расположение



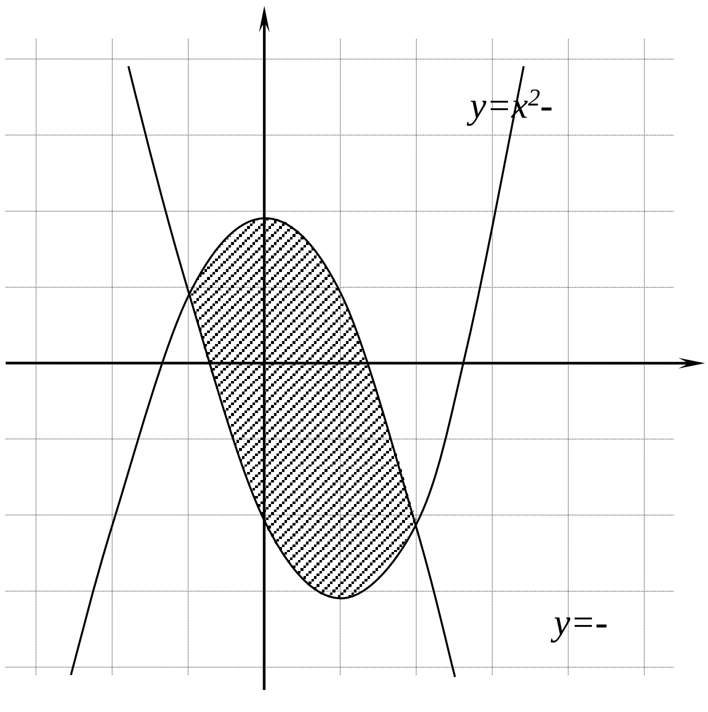
$$S=\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

<u>Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующему плану:</u>

1) по условию задачи делают схематический чертёж;
2) представляют искомую фигуру как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3) записывают каждую функцию в виде $f(x)$
4) вычисляют площадь каждой криволинейной трапеции и искомой фигуры.

<u>Задача</u>

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.



$$S = \int_{-1}^{2} ((-x^2+2)-(x^2-2x-2))\ dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2+2x+4)\ dx =$$

$$= (-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x)\,|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - (\frac{2}{3} + 1 - 4) = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

Задания для практического занятия:

1 вариант

Вычислить определённый интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница

1) $\int_1^2 (2x+3x^2)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx$; 3) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 4) $\int_1^0 \frac{dx}{x}$; 5) $\int_0^{\lg 2} e^x\,dx$; 6) $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$

2 вариант

Вычислить определённый интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница

1) $\int_{-1}^2 (1-3x^2)dx$; 2) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 3) $\int_0^4 (3\sqrt{x}-x)dx$; 4) $\int_0^1 e^x\,dx$; 5) $\int_1^0 \frac{dx}{x+1}$; 6) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

3 вариант

Вычислить определённый интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница

1) $\int_{-2}^0 (3x^2+1)dx$; 2) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 3) $\int_0^2 e^{3x}\,dx$; 4) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$; 6) $\int_2^3 (2x-1)^3\,dx$

4 вариант

Вычислить определённый интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница

1) $\int_{-2}^0 (9x^2-4x)dx$; 2) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 4) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$; 5) $\int_0^2 e^{3x}\,dx$; 6) $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$

1 вариант

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

а) параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 – x$ и осью Ох.

б) параболой $y = x^2 – 4x + 3$ и осью Ох.

в) графиком функции $y = \sin x$, и отрезком $[\pi; 2\pi]$ оси Ох.

2 вариант

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

а) параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ох.

б) графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = x + 2$ и прямыми $x = 0$, $x = 4$.

в) графиком функции $y = \cos x$ и отрезком $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ оси Ох.

3 вариант

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

а) параболой $y = x^2 + 4x - 3$ и осью Ох.

б) параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$.

в) параболой $y = -x^2$.

4 вариант

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

а) параболой $y = x(2 - x)$ и осью Ох.

б) параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x - 4$.

в) параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = -x$.

Практическое занятие №36. Решение рациональных и иррациональных уравнений и их систем.

Цель:

– ознакомиться с рациональными и иррациональными уравнениями и их системами, основными методами и способами их решения, овладеть техникой решения рациональных и иррациональных уравнений и их систем.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр.

Уравнения, в которых неизвестная содержится в знаменателе дроби, называются рациональными.

Рациональные уравнения решают следующим образом, надо:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) заменить данное уравнение целым, умножив обе части на общий знаменатель;
3) решить получившееся уравнение;
4) исключить из него те корни, которые обращают в нуль общий знаменатель

Пример

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$(5+2x)\cdot(7-x)=(3x+3)\cdot(4x-3)$$

$$-14x^2+6x+44=0$$

$$14x^2-6x-44=0$$

$$x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$$

Проверка:

x= 2 $\quad 4\cdot 2-3=5\neq 0 \quad 7-2=5\neq 0$

x = - 5,5 $\quad 4\cdot(-5{,}5)-3=-25\neq 0 \quad 7-(-5{,}5)=7+5{,}5=12{,}5$

Ответ: $x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Опр.

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными. Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в *n*-ую степень, равную показателю корня

Пример

1. *Решение уравнения* $\sqrt{1+3x}=1-x$ *методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.*

$$(\sqrt{1+3x})^2=(1-x)^2;$$

$1+3x=x^2-2x+1;$

$x^2-5x=0.$

Решив это уравнение, находим корни $x_1=0,\ x_2=5$.

Проверка: если $x=0$, то $\sqrt{1+3\cdot 0}=1-0$, $1=1$ – верно; если $x=5$, то $\sqrt{1+3\cdot 5}=1-5$, $4=4$ – неверно.

Ответ: x = 0.

Задания для практического занятия.

1 вариант

Задание 1. Решить уравнение: а) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$; б) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$

Задание 2. Решить уравнение: а) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$; б) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$

2 вариант

Задание 1. Решить уравнение: а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$

Задание 2. Решить уравнение: а) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; б) $x-5=\sqrt{x}+1$

Практическое занятие №37. Решение показательных уравнений и их систем.

Цель:

– ознакомиться с показательными уравнениями и их системами, основными методами и способами их решения, овладеть техникой решения показательных уравнений и их систем.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр.

Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:

$5^x=625 \Rightarrow 5^x=5^4 \Rightarrow x=4.$ *Ответ*: $x=4$

2) Уравнения вида $2^x+2^{x-1}-2^{x-3}=4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, вида $7^{2x}-48\cdot 7^x=49$ решаются с помощью подстановки $a^x=y$, сводится к квадратному.

Пример Решить уравнение: $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0$

Решение:

$5^x=y$,

$5y^2-26y+5=0$,

$D=676-4\cdot 25=576$,

$y_1=5$, $y_2=\frac{1}{5}$

$5^x=5$

$x=1$,

$5^x=\frac{1}{5}$

$x=-1$

Ответ: $x=1$ и $x=-1$

4) При решения уравнения вида $a^x=b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x, т.к. $b^x\neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x}=1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x=1 \Rightarrow x=0.$$

Задания для практического занятия:
1 вариант.
1.Решить показательные уравнения:
а) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;
б) $3^{x-1}-3^{x}+3^{x+1}=63$;
в) $9^{x}-7\cdot 3^{x}-18=0$
2. Решить графически уравнение: $2^{x}=3x-2$
2 вариант.
1. Решить показательные уравнения:
а) $6^{3x}\cdot\dfrac{1}{6}=6\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x}$
б) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;
в) $4\cdot 2^{x}-5\cdot 2^{x}+1=0$

2. Решить графически уравнение: $2^{x}=3x-2$

Практическое занятие №38. Решение логарифмических уравнений и их систем.

Цель:
- ознакомиться с логарифмическими уравнениями и их системами, основными методами и способами их решения, овладеть техникой решения логарифмических уравнений и их систем.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа.
Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. Часто используется формула перехода от одного основания к другому $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Задача 1 Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \qquad (1)$$

▶ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).
Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 (x + 1)(x + 3) = 3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1)(x + 3) = 8, \qquad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.
Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

Задания для практического занятия:
1 вариант.
1. Решить логарифмические уравнения:
а) $\log_5(2x-1)=\log_5 25$
б) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$
2. Решить графически уравнение: $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$

2 вариант.
1. Решить логарифмические уравнения:
а) $\lg(x^2-2)=\lg x$
б) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$
3. Решить графически уравнение: $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$

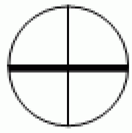
Практическое занятие №39. Решение тригонометрических уравнений и их систем.
Цель:
- ознакомиться с тригонометрическими уравнениями и их системами, основными методами и способами их решения, овладеть техникой решения тригонометрических уравнений и их систем.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

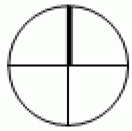
Тригонометрические уравнения. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

Простейшие тригонометрические уравнения.

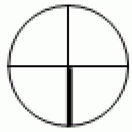
$\sin x = a$.



1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;



2). $\sin x = 1$, $x = \pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;

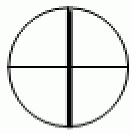


3). $\sin x = -1$, $x = -\pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;

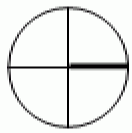
4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\sin x = a$, $|a| \leq 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

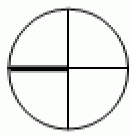
$\cos x = a$.



1). $\cos x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;

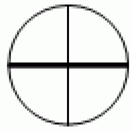


3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;

4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

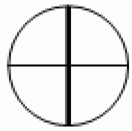
$$\mathbf{tan}\, x = a\ .$$



1). $\tan x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;

2). $\tan x = a$, $x = \operatorname{arctan} a + \pi k$, k – любое целое число.

$$\mathbf{cot}\, x = a\ .$$



1). $\cot x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;

2). $\cot x = a$, $x = \operatorname{arccot} a + \pi k$, k – любое целое число.

Методы решения тригонометрических уравнений. Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше) и *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

П р и м е р . Решить уравнение: $2\cos^2(x + \pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Р е ш е н и е . Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x + \pi/6) - 3\cos(x + \pi/6) + 1 = 0\ ,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x + \pi/6) = 1$, 2). $\cos(x + \pi/6) = 1/2$,

$x + \pi/6 = 2\pi k$, $x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

2. Разложение на множители. Этот метод рассмотрим на примерах.

П р и м е р 1. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0\ ,$$

преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0,$ 2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$ $\tan(x/2) = 1,$

$x_1 = 2\pi k;$ $x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

П р и м е р 2. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1.$

Р е ш е н и е. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$$

1). $\sin x = 0,$ 2). $\cos x - \sin x = 0,$

$x_1 = \pi k;$ $\tan x = 1,$

$x_2 = \pi/4 + \pi n,$

П р и м е р 3. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1.$

Р е ш е н и е. $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x,$

$$2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x,$$

$$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$

$$\cos 4x \cdot 2\sin 3x \cdot \sin x = 0,$$

1). $\cos 4x = 0,$ 2). $\sin 3x = 0,$ 3). $\sin x = 0,$

$4x = \pi/2 + \pi k,$ $3x = \pi n,$ $x_3 = \pi m.$

$x_1 = \pi/8 + \pi k/4;$ $x_2 = \pi n/3;$

3. *Приведение к однородному уравнению.* Уравнение называется *однородным относительно* sin *и* cos*, если все его члены одной и той же степени относительно* sin *и* cos *одного и того же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;
б) вынести все общие множители за скобки;
в) приравнять все множители и скобки нулю;
г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на
cos (или sin) в старшей степени;
д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan .

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$,

$\tan^2 x + 4 \tan x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = \square 1$, $y_2 = \square 3$, отсюда

1) $\tan x = -1$, 2) $\tan x = -3$,

$x_1 = -\pi / 4 + \pi k$; $x_2 = -\arctan 3 + \pi n$.

4. *Переход к половинному углу.* Рассмотрим этот метод на примере:

П р и м е р . Решить уравнение: $3 \sin x - 5 \cos x = 7$.

Р е ш е н и е . $6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) - 5 \cos^2 (x / 2) + 5 \sin^2 (x / 2) =$

$= 7 \sin^2 (x / 2) + 7 \cos^2 (x / 2)$,

$2 \sin^2 (x / 2) - 6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) + 12 \cos^2 (x / 2) = 0$,

$\tan^2 (x / 2) - 3 \tan (x / 2) + 6 = 0$,

. . . .

5. *Введение вспомогательного угла.* Рассмотрим уравнение вида:

$$a \sin x + b \cos x = c ,$$

где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?) :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{C} ,$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как cos φи sin φ(здесь φ- так называемый *вспомогательный угол*), и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C\ ,$$

или

$$\sin(x + \varphi) = C\ ,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

П р и м е р . Решить уравнение: $\sqrt{3}\ \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Р е ш е н и е . Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}\ /\ 2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2\ ,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2\ ,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2\ ,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. Преобразование произведения в сумму. Здесь используются соответствующие формулы.

П р и м е р . Решить уравнение: $2 \sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 4x$.

Р е ш е н и е . Преобразуем левую часть в сумму:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x\ ,$$

$$\cos 8x = 0\ ,$$

$$8x = \square\square/\ 2 + \square k\ ,$$

$$x = \square\square/\ 16 + \square k\ /\ 8\ .$$

7. Универсальная подстановка. Рассмотрим этот метод на примере.

П р и м е р .   Решить уравнение: $3\sin x - 4\cos x = 3$.

Р е ш е н и е . Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m+1)\pi$, тогда

$$3\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} - 4\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 3,$$

$$6\tan(x/2) - 4 + 4\tan^2(x/2) = 3 + 3\tan^2(x/2),$$

$$\tan^2(x/2) + 6\tan(x/2) - 7 = 0,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

1*а*). $\tan(x/2) = -7$, $x_1 = -2\arctan 7 + 2\pi k$;

1*б*). $\tan(x/2) = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

2). $x = (2m+1)\pi$, тогда

$$3\sin[(2m+1)\pi] - 4\cos[(2m+1)\pi] = 4 \neq 3 .$$

Таким образом, решение даёт только первый случай.

Задания для практического занятия:

ВАРИАНТ № 1

Решить уравнения:

1. $6\,\mathrm{ctg}^2\, t + \mathrm{ctg}\, t - 1 = 0$
2. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$
3. $\cos x + \cos 3x = 0$

ВАРИАНТ № 2

Решить уравнения:

1. $\sin 2x - 2\cos x = 0$
2. $\sin 12x + \sin 4x = 0$
3. $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$

Практическое занятие №40. Метод интервалов.

Цель:

- ознакомиться с методом интервалов, для решения неравенств, овладеть техникой решения неравенств методом интервалов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Решение неравенств методом интервалов основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция образуется в нуль точках X1 и X_2 (Xi< Xг) и между этими точками других корней не имеет, то в промежутках (xix_2) функция сохраняет знак. Поэтому для нахождения промежутков функции y = F(x) поступают так: на числовой прямой отмечают все точки, в который функция F(x) обращается в нуль. Чтобы найти знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассмотренного промежутка оси OX.

Образцы решения задач:

Решить неравенства:

А) (x + 3) (x - 2) (x - 5) < 0

x + 3 = 0

x - 2 = 0

x, = -3

x2 = 2

x - 5 = 0 x_3 = 5

Возьмем произвольные точки из каждого промежутка и определим знак. Решением неравенства будет:

(-∞; -3) U(2; 5)

Б) $\frac{(x-5)(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+4)} \leq 0$

Умножим обе части данного неравенства на квадрат знаменателя $(x-4)^2$ $(x+4)^2$

получим неравенство:

(x - 5) (x - 3) (x + 2) (x - 4) (x + 4) < O

Которое образуется в нуль в точках

x - 5 = 0 x = 5, x - 3 = 0 x = 3,

x + 2 = 0 x =-2, x - 4 = 0 x = 4, x + 4 = 0 x = -4

Решением неравенства служит объединение промежутков:

(-∞; -4) и [-2; -3] U(4; 5]

Задания для практического занятия:

№ варианта	Решить неравенства методом интервалов	№ варианта	Решить неравенства методом интервалов
1	1) (x+2)(x-3)(x-5)>0 2) $\frac{(x+3)(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+5)}$ $\frac{3x^2-17x+18}{x^2-5x+4} < 2$ x (x-1)(x+5) <0 $\frac{x-4}{x^2+2x} > 0$	11	$\frac{(-3)\quad {}^2(x-1)}{x+7}$ ≥0 $X^2(x-2)(x-1)^2 \leq 0$ $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} > 0$ x^2 - 25 < 0 $\frac{(x-1)x(x+2)}{x-4} > 0$

2	1) (x+5)(x-4)(x-6)<0 (x-1)(x-3)(x 2) $\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+5)}$ 3) $\frac{3x^2-14x+14}{x^2-4x+3}<2$ 4) $\frac{x-2}{(x+3)(x-5)}>0$ (x - 1) x (x+3) ≤0	12	$\frac{(x-3)^2(x-2)(x+1)}{(x-4)(x+3)} \leq 0$ (x + 2)(x + 6)(x + 4) > 0 x^2 - x - 6 > 0 $\frac{x^2-1}{x^2-25}<0$ (x - 6)(x - 3)^2(x - 1) <0
3	$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+2}>-3$ (x + 2)(x - 4)(x - 5)<0 (x+ l)(x-2)(x-5)>0 $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$ $\frac{x^2-4}{x+3}>0$	13	$\frac{(x+2)(x+5)(x-5)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$ (x+ 10)x(x-8) <0 $\frac{x^2-4}{x}>0$ (x - 7)(x + 3) x > 0 2x^2 - 3x + 5 < 0
4	(x + 4)(x - l)(x - 5) <0 (x - 2)(x - 3)(x^2 + x +.3) >0 (x + 3)(x + 4)(x^2 + 2x + 5) < 0 $\frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)^2}<0$ x^2 - 8x - 20 < 0	14	x^2 - x - 2 > 0 $\frac{(3+x)^2(1-x)}{x+2} \leq 0$ (x+ 3)(x - 5)x < 0 $\frac{x^3-1}{x^2-16} \geq 0$ (x + 2)(x^2 - 4) < 0
5	$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$ $\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)(x+2)} \geq 0$ (x-2)(x-7)x(x+5) <0 -x^2- 6x + 27 < 0 $\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0$	15	(x^2-l)(x-3)>0 $\frac{x(x-4)(x+5)}{x-2}<0$ x^2 - x - 7 <0 $\frac{x^3+8}{x-2} \geq 0$ (x - 7)(x + 5)(x + 6) < 0
6	$\frac{x^2-4}{x-1} \leq 0$ $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+8}<0$ $\frac{x^2-3x+2}{x-3} \geq 0$ (x + 5)(x + 4)^{2}x > 0 (x + l)(x — 2)(x + 3)(x - 6) ≤0	16	$\frac{x^2-6-x}{x-3}<0$ (x- l)(x + 2)x(x-3)>0 x^2 + 3x - 10 < 0 $\frac{(4-x)(3+x)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$ (x - 10)(x + 8)x(x-2) > 0

7	$(x+5)(x+4)^2>0$ $\frac{x^2-3x+2}{x-3}<0$ $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$ $(x+l)(x+2)x \geq 0$ $\frac{(x-1)^3(x^2+1)}{x^2(x+2)}>0$	17	$(x + 4)(x - 5)x(x - 1)< 0$ $\frac{x-2}{(x+3)(x-4)} \leq 0$ $(x - 7)(x - 2)^2(x + 1)>0$ $x^2 + x - 12 > 0$ $\frac{x^2-121}{x+1}>0$
8	$\frac{x^2(x-1)^3(x+2)}{x-3}<0$ $(x - 3)^2(x - 1)(x+3)> 0$ $\frac{x^2+x-6}{2x^2-9x-5} \leq 0$ $(x + 1)\ x\ (x - 2) > 0$ $\frac{(x+5)(x-5)}{x+6}<0$	18	$x^2(x + 2)(x - 1) > 0$ $\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x+3)(x+2)} \leq 0$ $(x - 2)(x - 7)(x + 6) < 0$ $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2}>0$ $2x^2 - x - 1 < 0$
9	$(x+4)(x-7)(x+1)<0$ $\frac{(x+3)(x-5)}{x-2} \geq 0$ $(x - 6)(x - 4)x > 0$ $x^2 - 4x + 3 > 0$ $\frac{x^2-2x-3}{x-5}<0$	19	$x^2 - 6x - 27 > 0$ $(x - 6)(x - 4)(x + 3) < 0$ $\frac{x^2-8}{x+2} \geq 0$ $\frac{(x-1)(x+4)(x-2)}{x^2-9} \leq 0$ $(x + 5)(x + 4)x > 0$
10	$(x - 7)(x + 5)(x - 3) > 0$ $\frac{3x^2-2x}{(x-1)^3} \leq 0$ $(X^2-1)X(X-4)>0$ $\frac{49-x^2}{x+7}<0$ $x(x - 4)(x+5)>0$	20	$5x^3+ x^2< 0$ $(x - 7)(x + 8)(x + 9) > 0$ $\frac{x^2-100}{x-1} \geq 0$ $\frac{(x-2)(x-3)(x+4)}{x^2-49} \leq 0$ $(x + 2)(x - 3)(x + 4) < 0$

Практическое занятие №41. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.
Цель:

– ознакомиться с методикой использования свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств, овладеть техникой решения уравнений и неравенств с использование свойств и графиков функций.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

При решении уравнений и неравенств смешанного типа приходится применять свойства элементарных функций: **область определения, область значений, монотонность, ограниченность, четность и нечетность, периодичность.**

Ограниченность множества значений функции

Уравнение f(x)=g(x) равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=A; g(x)=A. \end{cases}$, если для всех x∈ X справедливы неравенства f(x)≤A и g(x)≥A.

Монотонность функции

1) Если функция *f* возрастает (убывает) на множестве **X**, то уравнение f(x)=A на множестве **X** имеет не более одного корня.

2) Если функция **f** возрастает (убывает), а функция **g** убывает (возрастает) на множестве **X**, то уравнение f(x)=g(x) на множестве **X** имеет не более одного корня.

3) Если f(x) - монотонно возрастающая функция, то уравнения f(x)=x и f(f(x))=x равносильны.

Периодичность функции

1) Сумма двух функций с соизмеримыми периодами $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ является функция с периодом **НОК**($\mathbf{T_1,T_2}$)**.**

2) Сумма двух функций с несоизмеримыми периодами является непериодической функцией.

3) Не существует периодических функций, не равных константе, у которой периодами являются несоизмеримые числа.

Задания для практического занятия:

1. Не вычисляя корней квадратного уравнения $x^2-x-12=0$, найти

а) $x_1^2+x_2^2$, б) $x_1^3+x_2^3$, в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

2. Найти множество значений функции

а) $y=x^2+4x+6$, б) $y=-x^2+5x+2$, в) $y=\sqrt{x^2-6x+10}$, г) $y=\frac{1}{x^2+2x+7}$

3. Решить уравнения

а) $\frac{1}{x^2+4x+5}=x^3+6x^2+12x+9$, б) $\sqrt{x+1}=\frac{x-1}{x-2}$

4. При каких значениях параметра *a* оба корня уравнения $x^2-ax+4=0$ лежат на интервале (-5, 4)?

5. При каких значениях параметра *a* неравенство $4x^2+4(a+2)x+1>0$ выполняется при всех значениях *x*?

6. При каких значениях параметра *a* наименьшее значение функции $y=x^2-2ax+(a^2-6a+6)$ на отрезке $[0,2]$ равно -1?

7. При каких значениях параметра *a* уравнение $a\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2-(a-3)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+1=0$ имеет корни?

Практическое занятие №42. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Цель:

- ознакомиться с методами решения неравенств с двумя переменными, методикой изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости, овладеть техникой решения неравенств с двумя переменными.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Решение неравенства с двумя переменными, а тем более системы неравенств с двумя переменными, представляется достаточно сложной задачей. Однако есть простой алгоритм, который помогает легко и без особых усилий решать на первый взгляд очень сложные задачи такого рода. Попробуем в нем разобраться.

Пусть мы имеем неравенство с двумя переменными одного из следующих видов:

$y > f(x)$; $y \geq f(x)$; $y < f(x)$; $y \leq f(x)$.

Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.
2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.
3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

А теперь рассмотрим несколько задач на эту тему.

Задача 1.

Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq 4$?

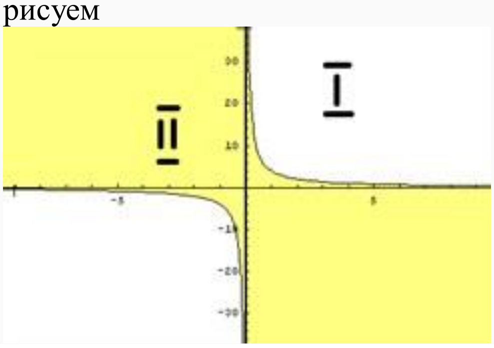
Решение.

1) Строим график уравнения $x \cdot y = 4$. Для этого сначала преобразуем его. Очевидно, что x в данном случае не обращается в 0, так как иначе мы бы имели $0 \cdot y = 4$, что неверно. Значит, можем разделить наше уравнение на x. Получим: $y = 4/x$. Графиком данной функции является гипербола. Она разбивает всю плоскость на две области: ту, что между двумя ветвями гиперболы и ту, что снаружи их.

2) Выберем из первой области произвольную точку, пусть это будет точка (4; 2). Проверяем неравенство: $4 \cdot 2 \leq 4$ – неверно.

Значит, точки данной области не удовлетворяют исходному неравенству. Тогда можем сделать вывод о том, что множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

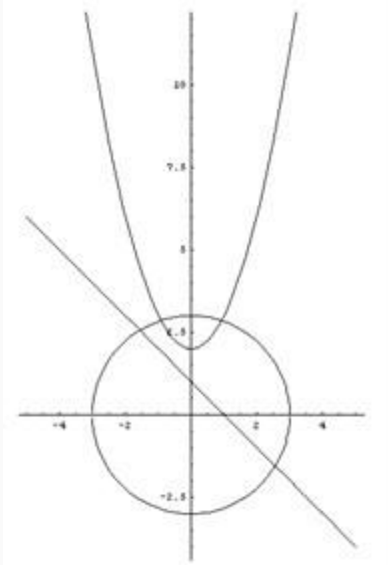
3) Так как неравенство нестрогое, то граничные точки, то есть точки графика функции $y = 4/x$, рисуем сплошной линией.



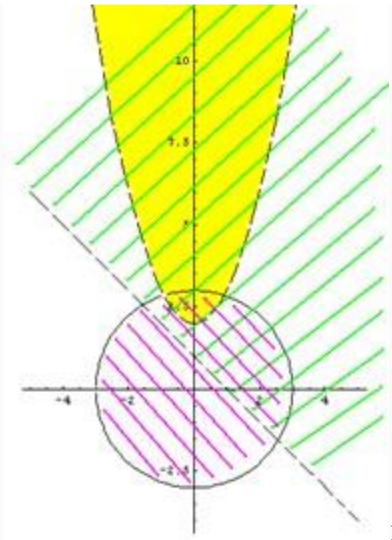
Закрасим множество точек, которое задает исходное неравенство, желтым цветом (рис. 1).
Задача 2.
Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой
{ $y > x^2 + 2$;
{$y + x > 1$;
{ $x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение.

Строим для начала графики следующих функций (рис. 2):
$y = x^2 + 2$ – парабола,
$y + x = 1$ – прямая
$x^2 + y^2 = 9$ – окружность.

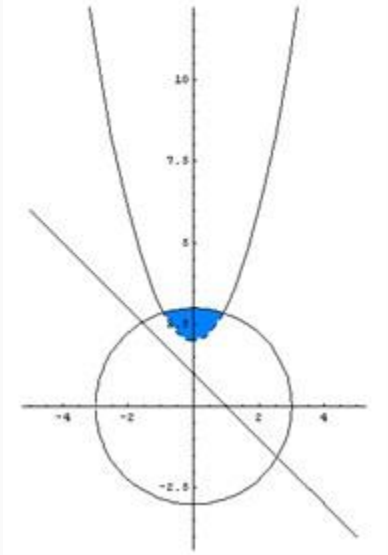


Теперь разбираемся с каждым неравенством в отдельности.
1) $y > x^2 + 2$.
Берем точку (0; 5), которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: $5 > 0^2 + 2$ – верно.
Следовательно, все точки, лежащие выше данной параболы $y = x^2 + 2$, удовлетворяют первому неравенству системы. Закрасим их желтым цветом.
2) $y + x > 1$.
Берем точку (0; 3), которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: $3 + 0 > 1$ – верно.
Следовательно, все точки, лежащие выше прямой $y + x = 1$, удовлетворяют второму неравенству системы. Закрасим их зеленой штриховкой.
3) $x^2 + y^2 \leq 9$.
Берем точку (0; -4), которая лежит вне окружности $x^2 + y^2 = 9$. Проверяем неравенство: $0^2 + (-4)^2 \leq 9$ – неверно.
Следовательно, все точки, лежащие вне окружности $x^2 + y^2 = 9$,



не удовлетворяют третьему неравенству системы. Тогда можем сделать вывод о том, что все точки, лежащие внутри окружности $x^2 + y^2 = 9$, удовлетворяют третьему неравенству системы. Закрасим их фиолетовой штриховкой.

Не забываем о том, что если неравенство строгое, то соответствующую граничную линию следует рисовать пунктиром. Получаем следующую картинку (рис. 3).



Искомая область – это область, где все три раскрашенных области пересекаются друг с другом (рис. 4).

Задача 3.

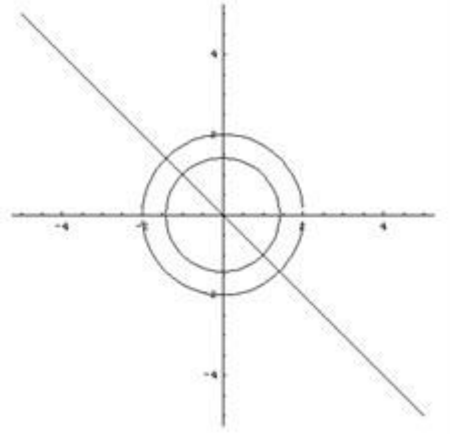
Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой:

$\{x^2 + y^2 \leq 16;$

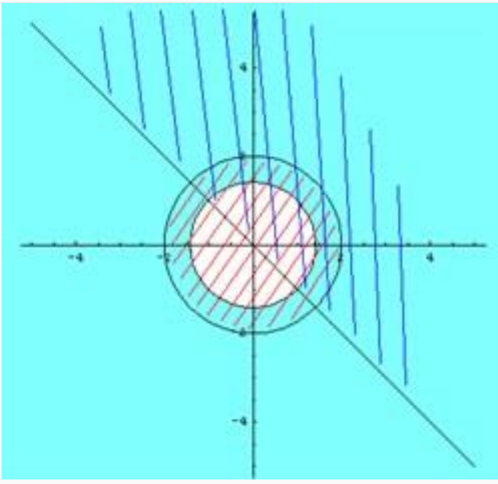
$\{x \geq -y;$

$\{x^2 + y^2 \geq 4.$

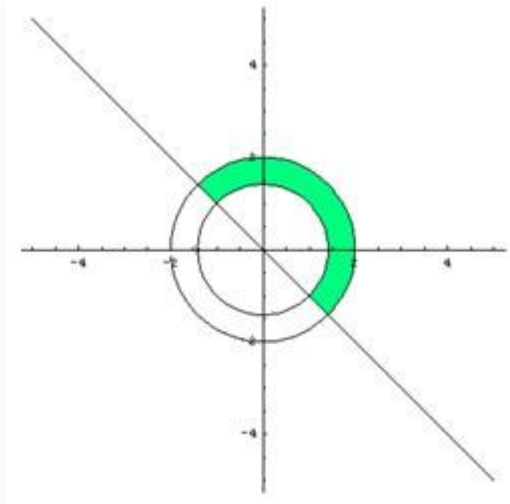
Решение.



Строим для начала графики следующих функций:
$x^2 + y^2 = 16$ – окружность,
$x = -y$ – прямая
$x^2 + y^2 = 4$ – окружность (рис. 5).
Теперь разбираемся с каждым неравенством в отдельности.
1) $x^2 + y^2 \leq 16$.
Берем точку (0; 0), которая лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 16$. Проверяем неравенство: $0^2 + (0)^2 \leq 16$ – верно.
Следовательно, все точки, лежащие внутри окружности $x^2 + y^2 = 16$, удовлетворяют первому неравенству системы.



Закрасим их красной штриховкой.
2) $x \geq -y$.
Берем точку (1; 1), которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: $1 \geq -1$ – верно.
Следовательно, все точки, лежащие выше прямой $x = -y$, удовлетворяют второму неравенству системы. Закрасим их синей штриховкой.
3) $x^2 + y^2 \geq 4$.
Берем точку (0; 5), которая лежит вне окружности $x^2 + y^2 = 4$. Проверяем неравенство: $0^2 + 5^2 \geq 4$ – верно.
Следовательно, все точки, лежащие вне окружности $x^2 + y^2 = 4$, удовлетворяют третьему неравенству системы. Закрасим их голубым цветом.
В данной задаче все неравенства нестрогие, значит, все границы рисуем сплошной линией. Получаем следующую картинку (рис. 6).
Искомая область – это область, где все три раскрашенных области пересекаются друг с другом (рис 7).



Задания для практического занятия:

1 . Решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} -2/3\,x + 2 < 0\,, \\ x^2 - 1 > 0\,. \end{cases}$$

2 . Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 7y > -11, \\ 2x + 3y < 10. \end{cases}$$

3. Решить неравенство: $x^2 + 2x + 2 \le 0$.
4. Решить неравенство: x^2-8x+12 ≥ 0
5.. Решить неравенство:8x^2 - 6x + 1 > 0
6. Найти наименьшее положительное целое решение неравенства: -x^2 + 2x ≥ -3
7. Найти все значения x, не являющиеся решением неравенства: x^2≥ 16
8. Решить неравенство: x^2 + 7x + 10 ≠ 0
9. Решить неравенство: x^2 + 3x + 8 > 0
10. Решить неравенство: x^2 - 4x + 4 < 0
11. Решить неравенство: x^2 - 4x + 4 ≤ 0

Практическое занятие № 43. Перестановки, размещения, сочетания.

Цель:

- ознакомиться с основными понятиями комбинаторики, овладеть техникой решения задач по теме.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр.

Перестановками из n разных элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из п элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле $P_n = n!$

n! (n – факториал) $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots n$

Пример .Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?

Решение

$P_{12} = 12! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots 12 = 479\,001\,600$ *Ответ:* 479 001 600

Опр.

Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются **размещениями.**

Обозначаются A_m^n и вычисляются по формуле $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, $A_n^n = n!$

Пример

Сколько существует вариантов распределения трёх призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

Решение

$A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$ *Ответ:* 210 вар

Опр.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Обозначают C_m^n и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$

Пример

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

Решение

$C_{36}^2 = \dfrac{36!}{(36-2)!\cdot 2!} = \dfrac{36!}{34!\cdot 2!} = 630$

Ответ: 630 способов

Бином Ньютона

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.$$

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot(-2) + C_6^2x^4\cdot(-2)^2 + C_6^3x^3\cdot(-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2\cdot(-2)^4 + C_6^5x\cdot(-2)^5 + C_6^6\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot(-2) + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot(-8) +$$
$$+ 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot(-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Задания для практического занятия.

1 вариант.

1. Вычислить: 1) P_7 ; 2) A_8^3; 3) C_8^5
2. Вычислить: 1) $\frac{10\,!}{8!\cdot 3!}$; 2) $\frac{8!-6!}{5!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?
   2) В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?
   3) Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в 6 классных комнатах (по одной группе в комнате)?
4. Записать разложение Бинома: $(x-2)^4$

2 вариант.

1. Вычислить: 1) P_6 ; 2) A_8^5; 3) C_8^3
2. Вычислить: 1) $\frac{6!\cdot 4!}{8!}$; 2) $\frac{9!-7!}{6!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 4 предмета из 8 предметов?
   2) Имеются 3 билета на просмотр 3-х различных кинофильмов. Сколькими способами 8 друзей могут распределить между собой эти 3 билета?
   3) Сколькими разными способами можно составить график очерёдности ухода в отпуск 8 сотрудников лаборатории?
4. Записать разложение Бинома: $(3x-2)^4$

Практическое занятие №44. Решение задач на перебор вариантов.

Цель:

- ознакомиться с основными понятиями комбинаторики, овладеть техникой решения задач на перебор вариантов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Комбинато́рика — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов). Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей, и имеет широкий спектр применения в различных областях знаний (например: в генетике, информатике, статистической физике).

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Характерная примета в задачах из области комбинаторики – вопрос в них обычно можно сформулировать так, чтобы он начинался со слов: «Сколькими способами...».

Первые задачи такого типа встречались уже, например, в древней и средневековой Индии.

«О друг, назови число различных ожерелий, которые можно получить из бриллиантов, сапфиров, изумрудов, кораллов и жемчугов» (Махавира, IX в.). Условие этой задачи, возможно, не очень понятно; судя по решению, здесь речь идет об ожерельях, которые бы отличались не по количеству или расположению камней одного и того же типа, а по наличию тех или иных камней – например, ожерелье из бриллиантов, из бриллиантов и кораллов, из бриллиантов, изумрудов и жемчугов и т. д.

«Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех разновидностей» (Шридхара, IX–X вв.).

Классическими понятиями комбинаторики являются перестановки, размещения и сочетания.

Перестановкой называется какой-либо способ упорядочения данного множества. Чтобы найти число всех перестановок множества из n предметов (это число обозначается P_n, от французского permutation – перестановка) – например, число способов, которыми можно расставить n томов на книжной полке, – обычно рассуждают таким образом. Первым можно поставить любой из n предметов, вторым – любой из $(n – 1)$ оставшихся предметов, третьим любой из $(n – 2)$ оставшихся предметов и т. д. В результате число перестановок будет равно произведению n множителей $n\,(n – 1)\,(n – 2)\,...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

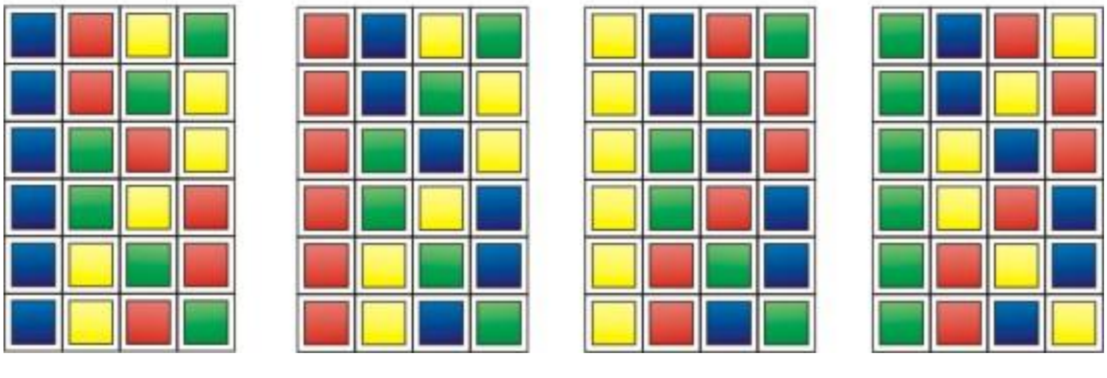


Рис. 1. Перестановки (варианты размещения четырех предметов по четырем ячейкам)

Упорядоченная совокупность m предметов, выбираемых из исходных n предметов, называется размещением из n по m. С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, нетрудно найти, что число размещений из n по m (оно обозначается A_n^m, от французского arrangement – размещение) равно произведению m множителей

$$n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ (n-m+2)\,(n-m+1).$$

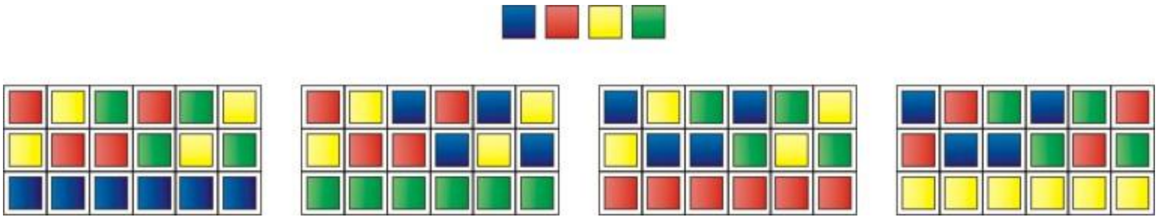


Рис. 2. Размещения (варианты размещения четырех предметов по трем ячейкам)

Наконец, неупорядоченная совокупность m предметов, выбираемых из исходных n предметов, называется сочетанием из n по m. Число сочетаний обозначается C_n^m, от французского combinaison – сочетание. Поскольку одному и тому же сочетанию соответствует P_m размещений (получаемых с помощью различных перестановок одного и того же набора m элементов), число сочетаний из n по m меньше числа размещений из n по m в P_m раз:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

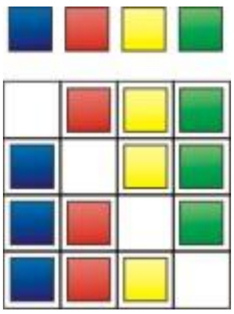


Рис. 3. Сочетания (неупорядоченные размещения)

Впервые понятия перестановки, размещения и сочетания в их взаимосвязи появились в написанной на древнееврейском языке арифметике (1321 г.) жившего в Провансе (Юго-Восточная Франция) Льва Герсонида, или Леви бен Гершона, однако его труд не был известен большинству последующих европейских математиков. В основном элементы комбинаторики были открыты и упорядочены математиками XVII и начала XVIII вв.

Например, термин permutation – перестановка – появился в учебнике «Теория и практика арифметика» (1656 г.) у работавшего в Лувене и Антверпене (ныне Бельгия) преподавателя математики Андре Таке, учебники которого получили большое распространение в XVII–XVIII вв. Понятие размещений и равенство $A_n^m = C_n^m P_m$ вновь появились только у Я. Бернулли, давшего наиболее полное изложение комбинаторики во второй части «Искусства предположений», изданного в 1713 г. спустя четыре года после смерти автора и ставшего фундаментальной работой по теории вероятностей.

А вот история сочетаний, как мы сейчас убедимся, более давняя: а именно, числа сочетаний C_n^m – оказывается, ни что иное, как давно знакомые нам биномиальные коэффициенты, которые мы (вслед за Эйлером) обозначали $\binom{n}{m}$.

Дело тут вот в чем: число $\binom{n}{m}$ – это коэффициент при $a^{n-m}b^m$ в разложении выражения $(a + b)^n$. Когда бином $(a + b)$ возводится в n-ую степень, т. е. перемножаются n выражений $(a + b)$, множитель b^m получается из m выражений $(a + b)$, а a^{n-m} – из оставшихся $(n - m)$ таких же выражений. Коэффициент $\binom{n}{m}$ равен числу, указывающему, сколько раз произведение $a^{n-m}b^m$ появляется в этом разложении, т. е. сколько раз можно выбрать m из n множителей. Слово combinaison – сочетание – употреблял уже Б. Паскаль, который, как уже было указано, уделил большое внимание свойствам биномиальных сочетаний, образующих треугольник Паскаля.

Соответственно, на числа сочетаний переносятся все уже известные свойства биномиальных коэффициентов, в частности, свойство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Это свойство можно доказать новым способом, исходя из комбинаторного смысла чисел C_n^m.

Сумма $(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n)$ – это совокупное число, которым можно выбрать последовательно из n имеющихся элементов: ноль элементов (это можно сделать только одним способом), один элемент (это, разумеется, можно сделать n способами), два элемента и т. д., наконец, n элементов (снова одним способом). Каково же это суммарное число? Обратимся к способу решения вышеприведенной задачи об ожерельях! В данном сочетании первый элемент либо присутствует, либо нет – две возможности. Независимо от первого, второй либо присутствует, либо нет – значит, для присутствия или отсутствия первого и второго четыре возможности. Независимо от первого и второго, третий может присутствовать, может не присутствовать – итого 8 возможностей и т. д. Всего получается 2^n всевозможных сочетаний, где каждый элемент может присутствовать, а может и отсутствовать, вплоть до одновременного отсутствия всех n элементов (единственный возможный вариант сочетания из n по 0): правда, индийская задача как раз этот – единственный – случай и исключала: ожерелье вовсе без камней – вообще не ожерелье.

Также по-новому, исходя из комбинаторного определения сочетаний, можно доказать и свойство $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, гарантирующее, вместе с очевидными равенствами $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, что числа сочетаний можно найти с помощью треугольника Паскаля. Попробуйте!

Т. н. мультипликативное представление биномиальных коэффициентов

$$C_n^m = (n\,(n - 1)\,(n - 2)\,...\,(n - m + 2)\,(n - m + 1))\,/\,(m\,(m - 1)\,(m - 2)\,...\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

впервые (после Леви бен Гершона) установил парижский преподаватель математики П. Эригон (1634 г.), но широкую известность оно получило благодаря работе Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», опубликованной в 1665 г. после смерти автора. Пожалуй, проще всего этот результат доказывается с помощью равенства $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$. Впрочем, мы сейчас обычно записываем «мультипликативное представление» несколько иначе, с помощью знака факториала. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Факториалом 0 считается 1. Термин «факториал» впервые предложил французский математик Л. Ф. А. Арбогаст (1800 г.). Факториал числа n обозначается $n!$ Это обозначение ввел в 1808 г. немецкий математик К. Крамп. Итак, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$. В этих обозначениях

$P_n = n!$,

$$A_n^m = \frac{n!}{m!},$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m!\ (n-m))!}.$$

Что касается самого слова «комбинаторика», то оно восходит к «Рассуждению о комбинаторном искусстве» двадцатилетнего Лейбница (1666 г.), которое положило начало этому разделу математики как самостоятельной науке. «Рассуждение» Лейбница содержало ряд теорем о сочетаниях и перестановках, но, кроме того, автор провозглашал весьма широкую применимость новой науки к таким разнообразным предметам, как замки, органы, силлогизмы, смешение цветов, стихосложение, логика, геометрия, военное искусство, грамматика, юриспруденция, медицина и богословие. В дальнейшем Лейбниц продолжил вынашивать грандиозный замысел комбинаторики, полагая, что, как обычная математика занимается большим и малым, единым и многим, целым и частью, так комбинаторика должна заниматься одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным местоположением. Лейбниц предвидел приложения комбинаторики к кодированию и декодированию, к играм, статистике, теории наблюдений. Следует отметить, что, хотя ныне мы понимаем комбинаторику более узко, тем не менее, предвидения Лейбница относительно развития математических теорий, относящихся к указанным предметам, ныне вовсе не выглядят такими беспочвенными, какими казались в его время.

Задания для практического занятия:

Задача 1. Какие двузначные числа можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Задача 2. В финальном забеге на 100 м участвуют Иванов, Громов и Орлов. Назовите возможные варианты распределения призовых мест.

Задача 3. В кружок бального танца записались Петя, Коля, Витя, Олег, Таня, Оля, Наташа, Света. Какие танцевальные пары девочки и мальчика могут образоваться?

Задача 4. Какие трехзначные числа можно составить из цифр 0, 2, 4?

Задача 5. Школьные туристы решили совершить путешествие к горному озеру. Первый этап пути можно преодолеть на поезде или автобусе. Второй этап - на байдарках, велосипедах или пешком. И третий этап пути - пешком или с помощью канатной дороги. Какие возможные варианты путешествия есть у школьных туристов?

Задача 6. Запишите все возможные варианты расписания пяти уроков на день из предметов: математика, русский язык, история, английский язык, физкультура, причем математика должна быть вторым уроком.

Задача 7. Саша ходит в школу в брюках или джинсах, к ним одевает рубашки серого, голубого, зеленого цвета или в клетку, а в качестве сменной обуви берет туфли или кроссовки.
а) Сколько дней Саша сможет выглядеть по-новому?
б) Сколько дней при этом он будет ходить в кроссовках?
в) Сколько дней он будет ходить в рубашке в клетку и джинсах?

Задача 8. В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий и зеленый цвета, причем были представлены все возможные варианты. Сколько команд участвовали в турнире?

Практическое занятие №45. Задачи на нахождение вероятности события.
Цель:

- ознакомиться с основными понятиями теории вероятностей, основными действиями над событиями, овладеть техникой решения задач на нахождение вероятности события.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Опр. ***Событие*** – это любое явление, которое происходит или не происходит или результат испытаний, наблюдений и явлений. События обозначают заглавными латинскими буквами А, В, С, …
Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи.

Долю успеха того или иного события называют вероятностью этого события и обозначают Р(А)

Опр . Если в некотором испытании существует ***n*** равновозможных попарно несовместных исходов и ***m*** из них благоприятствуют событию А, то вероятностью наступления события А называют отношение $\frac{m}{n}$ и записывают $P(A) = \frac{m}{n}$

Пример Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

Решение : А – « появление числа очков, большего 4» $n = 6$ - число всех исходов, $m = 2$ – благоприятствующих событию А (5, 6) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Ответ: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$

Опр. ***Суммой*** (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\,или\,B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Пример
В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Решение:
А: взяли синий карандаш
В: взяли зеленый карандаш
С: взяли синий или зеленый карандаш
Событие С равно сумме событий А и В: С = А + В

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{30}$

Вероятность события В равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{30}$

Вероятность события С равна $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{30} + \frac{8}{30} = \frac{15}{30} = 0{,}5$

Опр. ***Произведением*** (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\times B$, $AиB$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Пример
В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:
А: из первой коробки вынули белый шар
В: из второй коробки вынули белый шар
С: из коробок вынули белые шары

Вероятность события А равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Вероятность события В равна $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Вероятность события С равна $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$

Ответ: Р (С) ≈ 0,083

Задания для практического занятия:
1 вариант.

1. Среди 170 деталей, изготовленных на станке, оказалось 8 деталей, не отвечающих стандарту. Найдите вероятность выбора детали, не отвечающей стандарту.
2. Контролёр, проверяя качество 500 изделий, установил, что 10 из них относится ко 2-му сорту, а остальные к 1-му. Найдите вероятность: а) выбора изделия 1-го сорта; б) выбора изделия 2-го сорта.
3. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на 2-х брошенных костях, равна 6 ?
4. На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено первой бригадой, 15- второй и 10 – третьей. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная второй или третьей бригадой.
5. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет цифра 5?
6. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) валет; 2) король чёрной масти; 3) с чётным числом красной масти; 4) не с числом?
7. Брошены 3 монеты: копейка, пятак и 10 гривенник. Какова вероятность того, что: 1) на копейке появится орёл, а на пятаке и гривеннике – решки; 2) на всех монетах выпадут решки?

2 вариант.

1. Пусть имеется 80 деталей, среди которых 60 исправных, а 20 бракованных. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется исправной.
2. В партии из 100 деталей имеется 5 бракованных. Определить вероятность того, что взятая на удачу деталь окажется стандартной.
3. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на 2-х брошенных костях, равна 5 ?
4. В коробке находятся 250 лампочек, из них 100 по 100 Вт, 50 - по 60 Вт, 50 – по 25 Вт и 50 – по 15 Вт. Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки не превысит 60 Вт.
5. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет цифра 6?
6. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) валет; 2) король чёрной масти; 3) с чётным числом красной масти; 4) не с числом?
7. Брошены 3 монеты: копейка, пятак и 10 гривенник. Какова вероятность того, что: 1) на копейке появится орёл, а на пятаке и гривеннике – решки; 2) на всех монетах выпадут решки?

Практическое занятие №46. Закон распределения случайной величины и её числовые характеристики.

Цель:

- ознакомиться с законом распределения случайной величины и её числовыми характеристиками, овладеть техникой решения задач по теме.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Закон распределения случайной величины является её исчерпывающей характеристикой. Однако во многих практических задачах удобнее и проще пользоваться набором параметров, характеризующих распределение случайной величины. Числовыми характеристиками случайной величины называют параметры, характеризующие самые существенные черты закона распределения этой величины. Очевидно, что самым первым параметром является то значение случайной величины, вокруг которого группируются все её значения.

Математическое ожидание случайной величины. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда её математическое ожидание

$$M[X] \equiv m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

является суммой произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности. Отметим, что это постоянная величина. Для непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется как несобственный интеграл I рода

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Заметим, что математическое ожидание можно определить не у всех случайных величин, а только у тех, у которых представленные выше сумма или интеграл сходятся.

Перейдем теперь к моментному описанию случайных величин. Моментное (приближенное) описание случайной величины широко используется в механике, математической статистике и т.д. Моменты подразделяются на два вида:

– начальные моменты (приложены к началу координат),

– центральные моменты.

Начальным моментом порядка s называется математическое ожидание s-ой степени случайной величины:

$$\alpha_s[X] = M[X^s] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i$$ - для дискретной случайной величины;

$$\alpha_s[X] = M[X^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx$$ - для непрерывной случайной величины.

Очевидно, что первый начальный момент есть математическое ожидание $m_x = \alpha_1[X]$.

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание s-ой степени от центрированной величины $\overset{o}{X} = X - m_x$:

$$\mu_s[X] = M\left[\overset{o}{X}{}^s\right] = \sum_{1}^{n} \overset{o}{x}{}_i^s \, p_i = \sum_{1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i$$ - для дискретной случайной величины;

$$\mu_s[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^s\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}{}^s\ f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s\ f(x)dx$$ - для непрерывной случайной величины.

Очевидно, что центральный момент первого порядка для любой случайной величины равен нулю:

$$\mu_1[X] = M\left[\overset{\circ}{X}\right] = \sum_1^n (x_i - m_x)p_i = \sum_1^n x_i p_i - m_x \sum_1^n p_i = m_x - m_x = 0\,.$$

Рассмотрим второй центральный момент, который называется дисперсией и играет важную роль в теории вероятностей.

$$D_x \equiv \mu_2[X] = \sum_1^n (x_i - m_x)^2\ p_i$$ - для дискретных случайных величин;

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\ f(x)dx$$ - для непрерывных случайных величин.

Величина дисперсии характеризует разбросанность значений случайной величины X вокруг m_x. На примере дискретной случайной величины выразим дисперсию через начальные моменты

$$D_x = \sum_1^n (x_i - m_x)^2\, p_i = \sum_1^n x_i^2 p_i - 2m_x \sum_1^n x_i p_i + m_x^2 \sum_1^n p_i =$$

$$= \sum_1^n x_i^2 p_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2[X] - \alpha_1^2[X] \quad \Rightarrow$$

$$D_x = \alpha_2[X] - \alpha_1^2[X] = M$$

Эта формула удобна для практического подсчета значения дисперсии.

Другой характеристикой, связанной с дисперсией, является среднеквадратичное отклонение

$\sigma_x = \sqrt{D_x}$,

которое имеет размерность случайной величины и может быть наглядно представлено графически.

Свойства математического ожидания и дисперсии:

1. $M[C] = C$;

Доказательство: Представляя C как дискретную величину, у которой единственное значение принимается с вероятностью $p = 1$, получим $M[C] = C \cdot 1 = C$. Для непрерывной случайной величины:

$$M[C] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C \cdot f(x)dx = C \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\,.$$

2. $M[CX] = CM[X]$;

Доказательство: Свойство следует из свойств сумм и интегралов.

3. $M\left[\overset{\circ}{X}\right] = 0$;

Доказательство: Свойство следует из определения центрального момента первого порядка.

4. $\qquad D[C]=0$;

Доказательство: Так как $D[C]=M\left[(C-m_c)^2\right]=M\left[(C-C)^2\right]=M[0]=0$.

5. $\qquad D[CX]=C^2D[X]$;

Доказательство: Действительно, $D[CX]=M\left[(CX-M[CX])^2\right]=$

$$=M\left[C^2(X-m_x)^2\right]=C^2M\left[(X-m_x)^2\right]=C^2D[X].$$

Пример 2.1. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x_i	2	5	8
p_i	p_1	0,2	0,5

Найти: значение вероятности p_1; числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

◀ Так как $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$, то $p_1+0{,}2+0{,}5=1, \Rightarrow p_1=0{,}3$.

Найдем математическое ожидание

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=2\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}5=5{,}6.$$

Далее определим дисперсию

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-M^2[X]=4\cdot 0{,}3+25\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}5-5{,}6^2=6{,}8.$$

Определим среднее квадратическое отклонение

$\sigma_x=\sqrt{D_x}\cong 2{,}6$.

Для функции распределения $F(x)$, определения, имеем

$F(x)=0$, если $x\le 2$;

$F(x)=0{,}3$, если $2<x\le 5$;

$F(x)=0{,}5$, если $5<x\le 8$;

$F(x)=1$, если $x>8$.

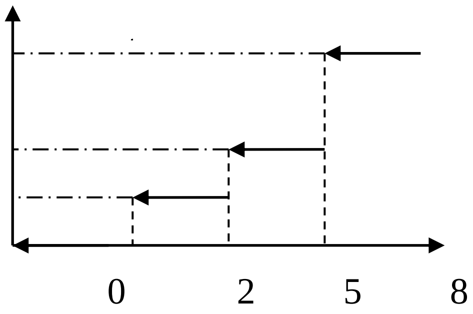


Рис. ▶

Строим функцию распределения (рис.2.4).

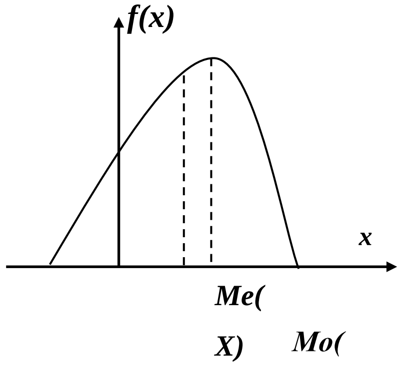
Наряду с математическим ожиданием, имеются характеристики случайной величины, указывающие на некоторые геометрические особенности её распределения.

Модой дискретной случайной величины называется её наивероятнейшее значение. Модой непрерывной случайной величины называется значение, при котором плотность вероятности максимальна. Мода случайной величины X обозначается символом $Mo(X)$ (Рис. 2.5).

Медианой непрерывной случайной величины X (для дискретных величин эта характеристика используется редко) называется её значение Me(X), удовлетворяющее условию

$$Me(x)=\max f(x).$$

Медиана может быть определена через интегрирование плотности вероятности:



$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}(X)} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Медиана делит фигуру, ограниченную кривой распределения и осью абсцисс, на две равных по площади части (Рис. 2.5).

Числовая характеристика случайной величины, связанная с несимметричностью ее распределения относительно математического ожидания называется асимметрией распределения и равна

$$As(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

где σ – среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

Асимметрия характеризует ‘‘скошенность’’ распределения относительно математического ожидания. Действительно, при симметричном относительно математического ожидания распределении непрерывной случайной величины третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^3 f(x)dx$$

равен нулю, как интеграл от нечётной функции в симметричных пределах. (В случае дискретной величины интеграл заменяется суммой, имеющей аналогичные свойства). Знак асимметрии определяется преобладанием отрицательных или положительных отклонений от математического ожидания. Например, распределение, показанное на рис.2.5, скошено влево и, следовательно, $\mathrm{As}(X) < 0$.

Задания для практического занятия:

1. Математическое ожидание и дисперсия СВ X соответственно равны 0,5 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X-3$.

2. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X)=3$ и $D(Y)=5$. Найти $D(Z)$, если $Z=4\cdot X-5\cdot Y+3$.

3. Закон распределения ДСВ X задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

Найти: c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X<3\}$.

4. Функция распределения ДСВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}2, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}6, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}9, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M(X^2)$ $D(X)$, $\sigma(X)$.

5. Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей

x_i^2	10	20
p_i	0,2	0,8

y_i^2	30	40	50
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти $D(X+Y)$ двумя способами:

1. Составив предварительно таблицу распределения СВ $Z=X+Y$;
2. Используя правило сложения дисперсий.

Практическое занятие №47. Представление данных, генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.

Цель:

- ознакомиться с основными понятиями математической статистики, характеристиками статистического ряда распределения, овладеть техникой решения задач по теме.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Генеральная совокупность.

Определение. Всю совокупность объектов, подлежащих изучению, называют генеральной совокупностью.

Генеральной совокупностью могут быть всё население страны, месячная продукция завода и т.д.

Но генеральная совокупность - это не просто множество. Если интересующая нас совокупность объектов слишком многочисленна, или объекты труднодоступны, или имеются другие причины, не позволяющие изучить все объекты, прибегают к изучению какой-то части объектов.

Выборка. Среднее арифметическое. Медиана.

Определение. Та часть объектов, которая попала на проверку, исследование и т.п., называется выборочной совокупностью или просто выборкой.

Определение. Число элементов в генеральной совокупности и выборке называется их объёмами.

Большая осведомлённость позволяет действовать лучше, но всё равно на некоторой стадии наступает незнание и, как результат – случайный выбор.

Что представляют собой выборки? Это ряды чисел.

Определение. Различные значения случайной величины называются вариантами.

Определение. Вариационным рядом называется ряд, расположенный в порядке возрастания (или убывания) вариантов с соответствующими им частотами

Задача

Дана выборка: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2;1,2; 4; 2,4.

Это ряд вариантов. Расположив эти варианты в возрастающем порядке, мы получим вариационный ряд: 1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,0; 3,2; 4; 5.

Составим таблицу

x_i	1,2	1,3	1,8	2,1	2,4	3,0	3,2		
n_i									
$n_{i/n}$	3/12=1/4	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Такие таблицы называют частотными. В них числа второй строки – частоты; они показывают, как часто встречаются в выборке те или другие её значения.

Определение. Относительной частотой значений выборки называют отношение её частоты к числу всех значений выборки.

Найдём размах ряда: R=5-1,2=3,8; Размах ряда равен 3,8.

Выборки характеризуются центральными тенденциями: средним значением, модой и медианой. Средним значением выборки называют среднее арифметическое всех её значений. Мода выборки – те её значения, которые встречаются чаще всего. Медиана выборки – это число, “разделяющее” пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки.

Дана выборка: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2;1,2; 4; 2,4.

Это ряд вариантов. Расположив эти варианты в возрастающем порядке, мы получим вариационный ряд: 1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,0; 3,2; 4; 5.

Среднее значение этого ряда равно 2,4.

Медиана ряда 2,25.

Мода ряда –1,2.

Медианой вариационного ряда называется то значение случайной величины, которое приходится на средину вариационного ряда (Ме).
Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.
Модой вариационного ряда называют вариант (значение случайной величины), которому соответствует наибольшая частота (Мо), т.е. которая встречается чаще других.
Среднеарифметическим значением вариационного ряда называется результат деления суммы значений статистической переменной на число этих значений, то есть на число слагаемых.
Размахом ряда называется разность между $R=x_{max} - x_{min}$, т.е. наибольшим и наименьшим значениями этих вариантов.
Проверим, правильно ли мы нашли среднее значение этого ряда, медиану и моду, опираясь на определения.
Сосчитали число членов, их 12 - чётное число членов, значит надо найти среднее арифметическое двух чисел записанных посередине, то есть 6 и 7-ой варианты. (2,1+2,4)\2=2.25 – медиана.
Мода. Модой является 1.2, т.к. только это число встречается 3 раза, а остальные встречаются меньше, чем 3 раза.
Среднеарифметическое значение находим так:
(1,2*3+1,3+1,8+2,1+2,4*2+3,0+3,2 +4+5)\12=2,4
Составим таблицу

x_i	1,2	1,3	1,8	2,1	2,4	3,0	3,2		
n_i									
$n_{i/n}$	3/12=1/4	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Такие таблицы называют частотными. В них числа второй строки – частоты; они показывают, как часто встречаются в выборке те или другие её значения.
Относительной частотой значений выборки называют отношение её частоты к числу всех значений выборки.
Найдём размах ряда: R=5-1,2=3,8; Размах ряда равен 3,8.
В статистике широкое применение находят такие характеристики, как мода и медиана.
Мода является наиболее приемлемым показателем при выявлении расфасовки некоторого товара, которой отдают предпочтение покупатели; цены на товар данного вида, распространённый на рынке; как размер обуви, одежды, пользующийся наибольшим спросом; вид спорта, которым предпочитают заниматься большинство населения страны, города, посёлка школы и т.д.

Практическое занятие №48. Решение вероятностных и статистических задач с практического характера.

Цель:

– ознакомиться с основным видами вероятностных и статистических задач, овладеть техникой решения вероятностных и статистических задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений. Путем наблюдений (испытаний, экспериментов), т.е. Опыта в широком смысле слова, происходит познание явлений действительного мира.

В своей практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых невозможно предсказать, результат которых зависит от случая.

Случайное явление можно охарактеризовать отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Математическая статистика - это раздел математики, который имеет своим предметом изучения методов сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решений.

При этом под статистическими данными понимается совокупность чисел, которые представляют количественные характеристики интересующих нас признаков изучаемых объектов. Статистические данные получаются в результате специально поставленных опытов, наблюдений.

Статистические данные по своей сущности зависят от многих случайных факторов, поэтому математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, которая является ее теоретической основой.

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3,: , 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: *перестановки, размещения, сочетания.*

Предварительно познакомимся с понятием *факториала.*

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют *n-факториалом* и пишут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Пример 1. Вычислить: а) $3!$; б) $7! - 5!$; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. А) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$

Тогда получим

$5!(6 \cdot 7 - 1) = 5! 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920$.

В) $\frac{7!+5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 + 1)}{5! 6} = \frac{6 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{43}{6}$.

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова *permutation*- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Или с помощью факториала: $P_n = n!$

Запомним, что *0!=1 и 1!=1.*

Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е. $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Размещения.

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m- число всех имеющихся элементов, n- число элементов в каждой комбинации. (A-первая буква французского слова *arrangement*, что означает "размещение, приведение в порядок").

При этом полагают, что $n \le m$.

Число размещений можно вычислить по формуле

$$\underbrace{A_m^n = m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots}_{n\ множителей},$$

Т.е. Число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Пример 3. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n-натуральные числа, причем $n \le m$).

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n (C-первая буква французского слова *combination* - сочетание).

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n, деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Пример 4. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.
Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \le n \le m)$$

(по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

1.2. Решение комбинаторных задач

Задача 1. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

Задача 2. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} =$$

$$= \frac{11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 14}{2} = 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 = 3003.$$

Задача 3. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение.

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Задача 4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение. Солдат в дозор можно выбрать

$$C_{80}^3 = \frac{80!}{77!3!} = \frac{77! \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80}{77! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{78 \cdot 79 \cdot 80}{2 \cdot 3} = 13 \cdot 79 \cdot 80 = 82160$$

Способами, а офицеров $C_3^1 = 3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется $C_{80}^3 \cdot C_3^1 = 82160 \cdot 3 = 246480$ способов.

Задача 5. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^2 = 21$.

Решение.

Так как $C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-2-2)!2!} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2} = \frac{(x-4)! \cdot (x-3)(x-2)}{(x-4)! \cdot 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{2}$, то получим

$\frac{(x-3)(x-2)}{2} = 21$, $\quad (x-3)(x-2) = 42$, $\quad x^2 - 5x + 6 - 42 = 0$, $\quad x^2 - 5x - 36 = 0$

$x_1 = -4$, $x_2 = 9$.

По определению сочетания следует, что $x - 2 \le 2$, $x \le 4$. Т.о. $x = 9$.

Ответ: 9

Понятие о случайном событии. Виды событий. Вероятность события

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть *испытанием.*

Результат этого действия или наблюдения называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- *невозможным.*

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *А, В, С, Д,* : .

Полной системой событий A_1, A_2, A_3, : , A_n называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Если полная система состоит из двух несовместных событий, то такие события называются противоположными и обозначаются А и $\overline{A}$.

Пример. В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными:

Достали пронумерованный шар *(А);*

Достали шар с четным номером *(В);*

Достали шар с нечетным номером *(С);*

Достали шар без номера *(Д).*

Какие из них образуют полную группу?

Решение. *А* - достоверное событие; *Д* - невозможное событие;

В и *С* - противоположные события.

Полную группу событий составляют *А* и *Д, В* и *С*.

Вероятность события, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется *вероятностью* этого события и обозначается символом *Р(А).*

Определение. Вероятностью события *А* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *А*, к числу *n* всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы *n,* выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение *m* к *n*.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$. Разделив обе части на *n*, получим $0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Задача 2. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n=C_{18}^{5}=\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=18\cdot17\cdot28=8568$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^{3}=\frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3}=14\cdot13\cdot2=364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет

$$m=C_4^2\cdot C_{14}^3=6\cdot364=2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2184}{8568}\approx0{,}255.$$

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом A+B, а сумму n событий символом $A_1+A_2+ : +A_n$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$ или

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Следствие 1. Если событие $A_1, A_2, : ,A_n$ образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Задача 1. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 - по 15000 руб, на 15 - по 10000 руб., на 25 - по 2000 руб. И на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение. Пусть А, В, и С- события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. Так как события А, В и С несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3.$$

Задача 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение. События "контрольная работа поступила из города *A*", "контрольная работа поступила из города В" и "контрольная работа поступила из города С" образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$0{,}6+0{,}1+p=1$, т.е. $p=1-0{,}7=0{,}3$.

Задача 3. Вероятность того, что день будет ясным, $p=0{,}85$. Найти вероятность g того, что день будет облачным.

Решение. События "день ясный" и "день облачный" противоположные, поэтому

$p+g=1$, т.е $g=1-p=1-0{,}85=0{,}15$.

При совместном рассмотрении двух случайных событий *A* и *B* возникает вопрос:

Как связаны события *A* и *B* друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие *условной вероятности.*

Определение. Пусть *A* и *B* - два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события *A* или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$.

Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$, $(P(B)\neq 0)$.

Задача 1. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок- мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что в семье два мальчика, а событие *B* - что один мальчик.

Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка.

Тогда $P(AB)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ и по формуле находим

$P(A/B)=\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3$.

Событие *A* называется *независимым* от события *B*, если наступление события *B* не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события *A*.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$.

Задача 2. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2- из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1и A_2 независимы.

Так как $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ находим $P(A_1A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$.

Задача 3. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие *A*- выход из строя первого элемента, событие *B*- выход их строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

А) Одновременное появление *A* и *B* есть событие *AB*. Следовательно,

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

Б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\overline{A}$ (противоположное событию *A*- выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент- событие *B*. Найдем вероятности событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$;

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\overline{A}\,\overline{B}$ и, значит,

$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

Задания для практического занятия:

1. В случайном эксперименте 17 элементарных событий. Событию А благоприятствуют 8 из них. Сколько элементарных событий благоприятствует событию Ă? Найдите вероятность события Ă, если вероятность события А равна 0,32.
2. Бросают одну игральную кость. Событие А — выпало четное число очков. Событие В состоит в том, что выпало число очков, большее 3. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию AUB. Найдите P(AUB).
3. Бросают две игральные кости. Событие А — на первой кости выпало меньше 3 очков. Событие В — на второй кости выпало больше 4 очков. Выпишите элементарные события, благоприятствующие событию А∩В. Опишите словами это событие и найдите его вероятность.
4. События Uи Vнесовместны. Найдите вероятность их объединения, если P(U)= 0,3, P(V) = 0,5.
5. В барабане лотереи 20 одинаковых шаров. Шары пронумерованы от 1 до 20. Барабан вращается, и из него выпадает один шар. Найдите вероятность того, что номер шара — четное число.
6. В результате некоторого опыта с вероятностью 0,63 может наступить событие А, с вероятностью 0,59 —событие В и с вероятностью 0,22 —событие
А ∩ В. Найдите вероятность события AUB. Является ли событие AUB достоверным?
7. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет четное число, а во второй — число, большее чем 3.
8. В экзамене 6 вопросов. К каждому вопросу дано 2 варианта ответов, из которых только один вариант верный. Найдите вероятность того, что, отвечая наугад, ученик правильно ответит хотя бы на один вопрос.
9. В кармане у Буратино 5 золотых и 6 серебряных монет. Все монеты одинаковы по форме и размеру. Буратино, не глядя, вынимает из кармана 5 монет. Найдите вероятность того, что все эти монеты — золотые.
10. Слово «Математика» написали на картонке и разрезали картонку на буквы. Буквы перемешали. Найдите вероятность вытащить наудачу картонку с гласной буквой.

11. В результате некоторого опыта с вероятностью 0,78 может наступить событие A, с вероятностью 0,34 —событие B и с вероятностью 0,11 —событие $A \cap B$. Найдите вероятность события $A \cup B$? Верно ли, что событие $A \cup B$достоверное?

12. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет нечетное число, а во второй — число, меньшее чем 3.

13. В экзамене 5 вопросов. К каждому вопросу дано 2 варианта ответов, из которых только один вариант верный. Найдите вероятность того, что, отвечая наугад, ученик даст хотя бы один неверный ответ.

14. В вазочке на шкафу 4 конфеты с фруктовой начинкой и 5— с молочной. Все конфеты одинаковы по форме и размеру. Маша дотянулась рукой до вазочки и, не глядя, выбирает 5 конфет. Найдите вероятность того, что все выбранные конфеты имеют молочную начинку.

Практическое занятие №49. Параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей, признаки и свойства.

Цель:

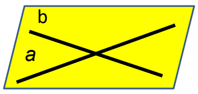
– ознакомиться с основными понятиями стереометрии, понятиями параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей, их признаками и свойствами, овладеть техникой решения геометрических задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

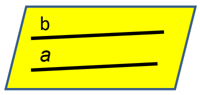
Две прямые

Лежат в одной плоскости

пересекаются

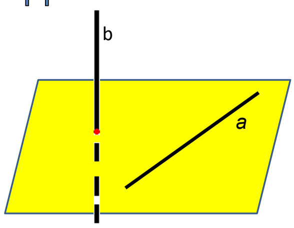


параллельны



Не лежат в одной плоскости

скрещиваются



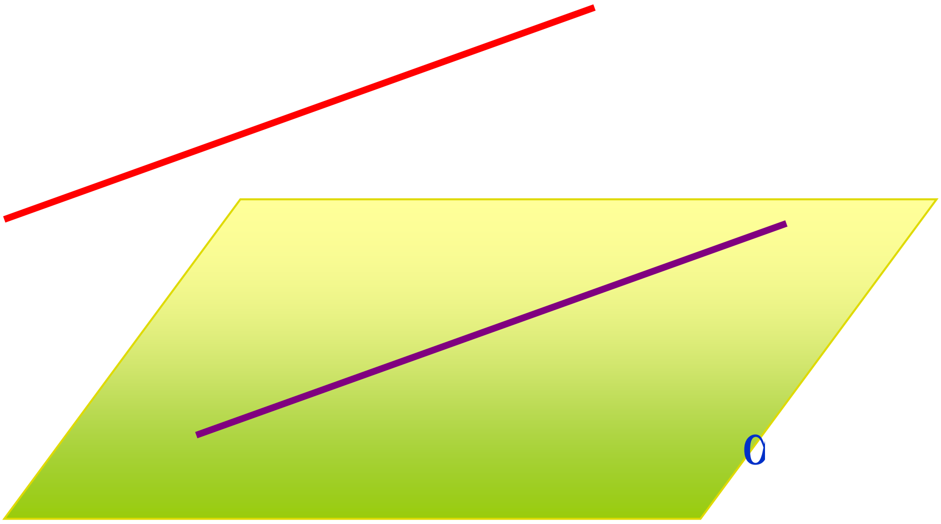
Определение

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

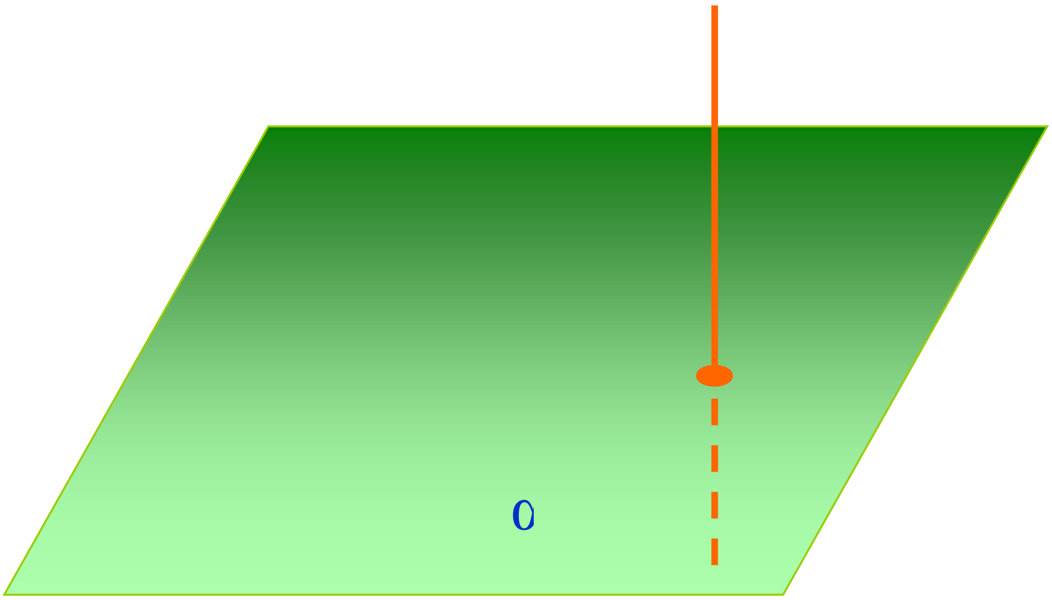
Прямая и плоскость



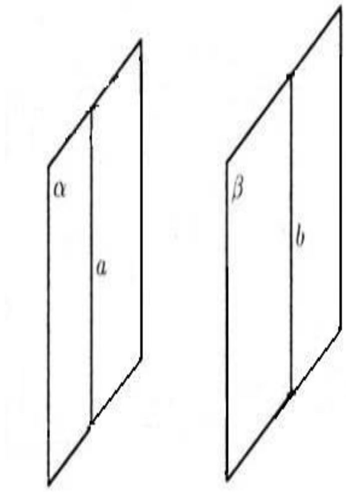
$b \in \alpha, \quad c \parallel \alpha$

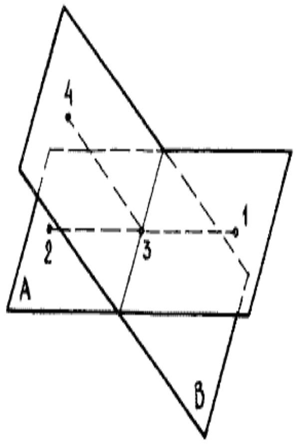
Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.



$b \cap \alpha$





Опр

Параллельные

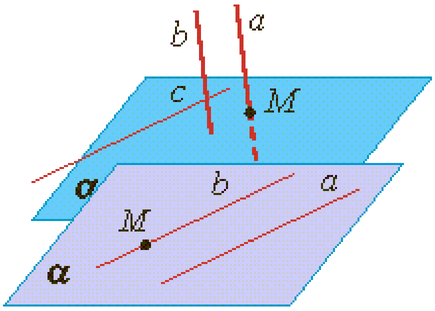
Пересекающиеся

Опр. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема о параллельных прямых.
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.
Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

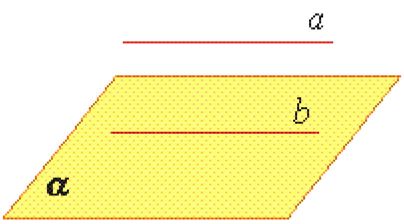
Теорема о трех прямых в пространстве.
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).



Параллельность прямой и плоскости
Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости
Теорема.
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

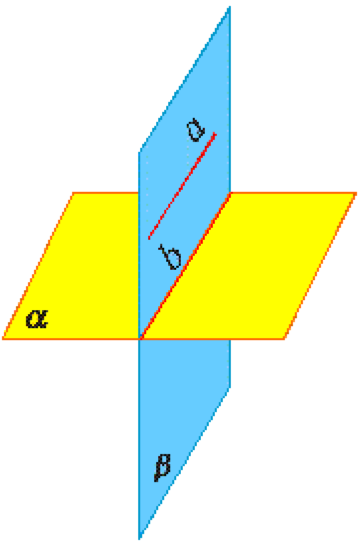
Теорема.
данную прямую,
плоскости, и пересекает эту
пересечения плоскостей



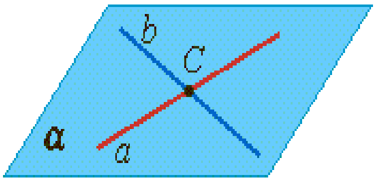
Если плоскость проходит через параллельную другой плоскость, то линия параллельна данной прямой.

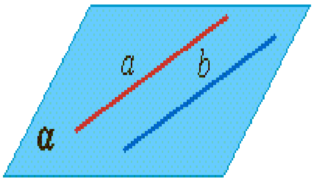
Теорема.
параллельных
плоскости, то

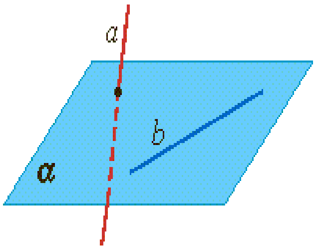
Если одна из двух прямых параллельна данной другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.



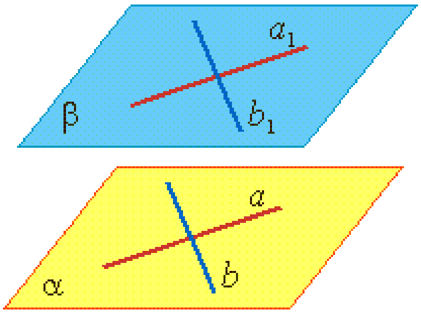
Взаимное расположение прямых в пространстве



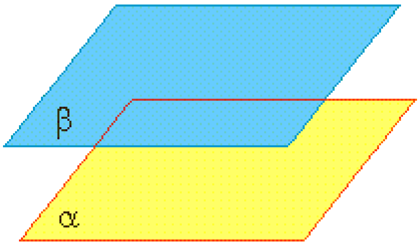




Пересекающиеся прямые: лежат в одной плоскости, имеют одну общую точку.



Параллельные прямые: лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)



Скрещивающиеся прямые: не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)

Параллельность плоскостей

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки. α‖β.

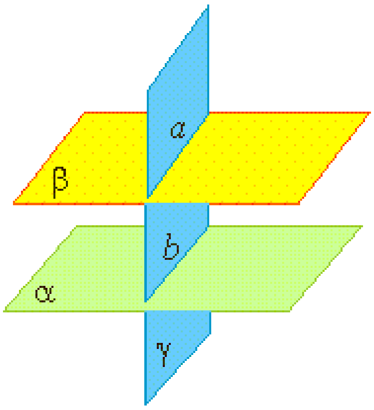
Признак параллельности двух плоскостей

Теорема.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости , то эти плоскости параллельны. Если $a \| a_1$ и $b \| b_1$, то α‖β.

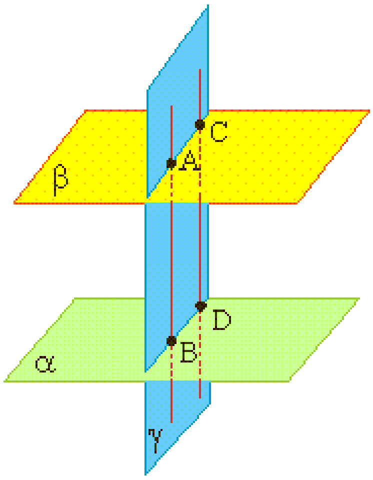
Свойства параллельных плоскостей

Вели α‖β и они пересекаются с γ, то $a \| b$.



Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если α‖β и AB‖CD, то AB = CD. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Задание для практического занятия:

1 вариант.

1) Треугольники АВС и АДС лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону АС. Точка Р – середина стороны АД, точка К – середина ДС.

а) Каково взаимное расположение прямых РК и АВ?

б) Чему равен угол между прямыми РК и АВ, если угол АВС равен 40º, а угол ВСА = 80º. Ответ обобщите.

2) Прямые а и в лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка В не лежит в плоскости Δ АДС. Точки M, N и Р – середины отрезков ВА, ВС, ВД соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (АДС) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP, если $S_{\Delta АДС} = 48$ см^2 .

2 вариант.

1) Основание трапеции АВСД лежит в плоскости α. Через точки В и С проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.
1) Каково взаимное расположение EF и AB?
2) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если угол ABC = 150º. Ответ обоснуйте.
2) Прямые а и в лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть
а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.
3) В тетраэдре ДАВС точки M, N и P – середины рёбер ДА, ДВ, ДС соответственно.
а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ABC) параллельны.
б) Найти площадь Δ АВС, если $S_{\Delta MNP}$= 14 см^2 .

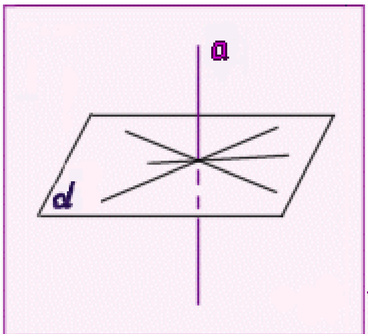
3 вариант.
1) В тетраэдре АВСД точки М, К, Р являются серединами рёбер АВ, ВС, ВД. Доказать, что плоскость (МКР) параллельна плоскости (АДС) и вычислить $S_{\Delta МКР}$, если $S_{\Delta АДС}$ = 48 см^2 .
2) Прямая МК, не лежащая в плоскости АВС, параллельна стороне АВ параллелограмма АВСД. Выяснить взаимное расположение прямых МК и АД и найти угол между ними, если угол АДС = 130º.
3) В ромбе АВСД диагонали пересекаются в точке О, точка F не лежит в плоскости (АВС). Можно ли провести плоскость через FC и точки А и О? Ответ обоснуйте.

4 вариант.
1) В тетраэдре ДАВС точки К, Е, М являются серединами рёбер АС, ДС, ВС. Доказать, что плоскость (КЕМ) параллельна плоскости (АДВ) и вычислить $S_{\Delta АДВ}$, если $S_{\Delta KEM}$ = 27 см^2 .
2) Прямая m параллельна диагонали ВД ромба АВСД и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что m и АД – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними, если угол АВС равен 128º.
3) Дан параллелограмм АВСД и точка Е, не лежащая в плоскости (АВС). Как расположена прямая АС и плоскость ЕВД? Ответ обоснуйте.

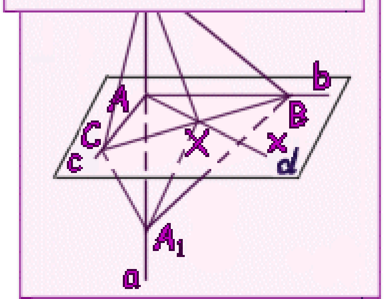
Практическое занятие №50. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикуляров.

Цель занятия: ознакомиться с основными понятиями стереометрии, понятиями перпендикуляра и наклонной, их свойствами, овладеть техникой решения геометрических задач.

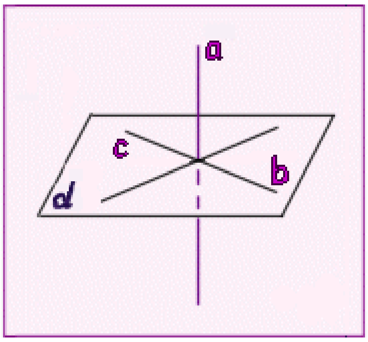
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:



Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.
Теорема 1
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.



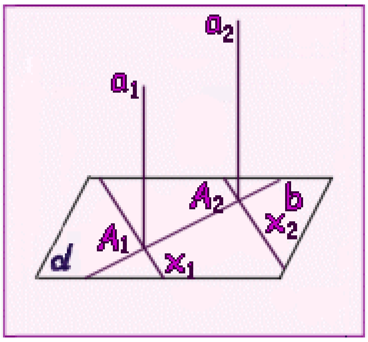
Доказательство:
Пусть a прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α. Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X. Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AA1 иAA2. Треугольник A1CA2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению (AA1=AA2). по той же причине треугольник A1BA2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A1BC и A2BC равны по трем сторонам. Из равенства треугольников A1BC и A2BC следует равенство углов A1BX иA2BX и, следовательно равенство треугольников A1BX и A2BX по двум сторонам и углу между ними. Из равенства сторон A1X и A2X этих треугольников заключаем, что треугольник A1XA2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.



Теорема 2

1-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Доказательство: Пусть a1 и a2 - 2 параллельные прямые и α плоскость, перпендикулярная прямой a1. Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a2. Проведем через точку A2 пересечения прямой a2 с плоскостью α произвольную прямую x2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A1 пересечения прямой a1 с αпрямую x1, параллельную прямой x2. Так как прямая a1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a1 и x1перпендикулярны. А по теореме 1параллельные им пересекающиеся прямые a2 и x2 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая a2 перпендикулярна любой прямой x2 в плоскости α. А это (по определению)значит, что прямая a2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.



Теорема 3

2-ое свойство перпендикулярных прямой и плоскости. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Задания для практического занятия:

1. Прямая *AK* перпендикулярна к плоскости правильного треугольника *ABC*, точка *M* – середина стороны *BC*.
1) Докажите, что $MK \perp BC$
2) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABC*, если $AK = a$, $BC = 2a$.
2. Из точки *M* проведен перпендикуляр *MB* к плоскости прямоугольника *ABCD*.
1) Докажите, что треугольники *AMD* и *MCD* – прямоугольные.
2) Найдите угол между прямой *MD* и плоскостью *ABC*, если *CD* = 3см,
AD = 4 см, *MB*=5 см.
3. Высота прямоугольного треугольника *ABC*, опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины *C* прямого угла восставлен к плоскости треугольника *ABC* перпендикуляр *CM*, причем *CM* = 28. Найдите расстояние от точки *M* до гипотенузы *AB*.
4. Докажите, что прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна к наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к ортогональной проекции этой на наклонной на данную плоскость

5. Высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника основания. Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.
6. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, сторона которого равна $2\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояния от точки O до сторон AB, BC и CA находятся в отношении $2:1:3$. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{15}{2}}$. Найдите высоту пирамиды.

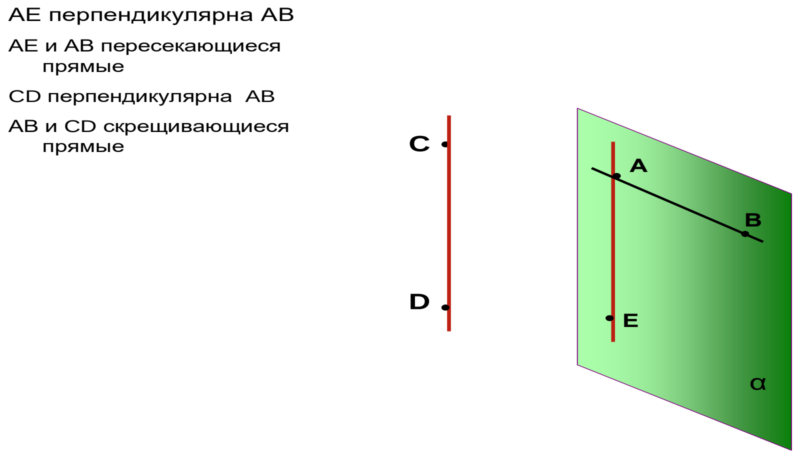
Практическое занятие №51. Перпендикулярность плоскостей.
Цель:

- ознакомиться с основными понятиями стереометрии, понятием перпендикулярности плоскостей, свойствами, овладеть техникой решения геометрических задач.

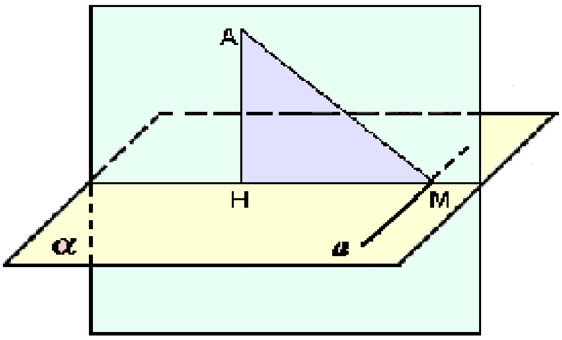
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

При решении задач используется определение перпендикулярных прямых в пространстве.
Опр.
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^o.

Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она
перпендикулярна к этой плоскости.
В задачах часто используется *теорема о 3-х перпендикулярах*:
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на
эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
Обратная теорема
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней,
перпендикулярна и к её проекции.
При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



АН - перпендикуляр

AM - наклонная
HM – проекция наклонной на данную плоскость
a - прямая, проходящая через основание наклонной

Задания для практического занятия.
1 вариант.
1. Дан тетраэдр MABC, в котором MB $\perp$ BA. Доказать, что ΔMBД – прямоугольный, если Д – произвольная точка отрезка AC. Найти MД и площадь ΔMBД, если MB = BД = a.
2. Из точки M проведён перпендикуляр MД = 6 см к плоскости квадрата. Наклонная MO образует с плоскостью квадрата угол 60º. O – точка пересечения диагоналей. Доказать, что ΔMOД – прямоугольный. Найти площадь квадрата.

2 вариант.
1. Четырёхугольник ABCД – квадрат, O – его центр. Прямая OM перпендикулярна плоскости квадрата. Доказать, что MA = MB = MC = MД. Найдите MA, если AB = 4 см, OM = 1 см.
2. Из точки M проведён перпендикуляр к плоскости ΔABC. BM = 9 см, AC = 10 см, BC = BA = 13 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

3 вариант.
1. Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равна 4 см. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника ABC, если AB = 6 см.
2. Из точки M проведён перпендикуляр MB = 4 см к плоскости прямоугольника ABCД. Наклонные MA и MC образуют с плоскостью прямоугольника углы 45º и 30º соответственно. Доказать, что ΔMAД и ΔMCД прямоугольные. Найти стороны прямоугольника.

4 вариант.
1. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AД, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что ΔCBД – прямоугольный. Найти BД, если BC = 4, ДC = 5.
2. Через вершину B ромба ABCД проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба. Если AB = 25 см, $\angle$ BAД = 60º, BM = 12,5см.

Практическое занятие №52. Геометрические преобразования пространства.
Цель:
- ознакомиться с основными понятиями стереометрии, понятием геометрического преобразования пространства (параллельный перенос, симметрия относительно плоскости), свойствами преобразования пространства, овладеть техникой решения геометрических задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Параллельный перенос.
Геометрическое преобразование плоскости - взаимно-однозначное отображение этой плоскости на себя. Наиболее важными геометрическими преобразованиями являются движения, т.е.

преобразования, сохраняющие расстояние. Иначе говоря, если f - движение плоскости, то для любых двух точек A, B этой плоскости расстояние между точками $f(A)$ и $f(B)$ равно $|AB|$. Движения связаны с понятием равенства (конгруэнтности) фигур: две фигуры F и G плоскости а называются равными, если существует движение этой плоскости, переводящее первую фигуру во вторую. Фактически это определение использовал еще Евклид (см. Геометрия), называвший две фигуры равными, если одну из них можно наложить на другую так, чтобы они совпали всеми своими точками; под наложением здесь следует понимать перекладывание фигуры как твердого целого (без изменения расстояний), т.е. движение.

Примерами движений плоскости являются осевая и центральная симметрия, параллельный перенос, поворот. Как пример, напомним определение параллельного переноса. Пусть $\vec{a}$ - некоторый вектор плоскости α. Геометрическое преобразование, переводящее каждую точку $A \in \alpha$ в такую точку A' что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ (рис. 1), называется параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Параллельный перенос является движением: если точки A и B переходят в A' и B', т.е. $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \overrightarrow{AB} + \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, и потому $|A'B'| = |AB|$.

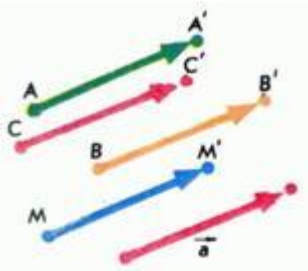


Рис. 1

При решении геометрических задач с помощью движений часто применяется свойство сохранения пересечения: при любом движении f пересечение фигур переходит в пересечение их образов, т.е. если P, Q - произвольные фигуры, то фигура $P \cap Q$ переходит в результате движения f в фигуру $f(P) \cap f(Q)$. (Аналогичное свойство справедливо для объединения.)

Задача 1. Окружность, центр которой принадлежит биссектрисе угла, пересекает его стороны в точках A, B, C и D (рис. 2). Доказать, что $|AB| = |CD|$.

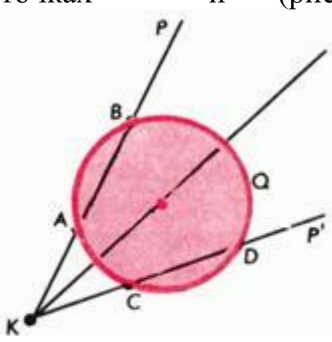


Рис. 2

Решение. Обозначим через P одну из сторон угла, а через Q - круг, границей которого является рассматриваемаяокружность. При симметрии s относительно биссектрисы угла луч P переходит в луч P', который образует вторую сторону угла, а круг Q переходит в себя: $s(P) = P'$, $s(Q) = Q$. Согласно свойству сохранения пересечения фигура $P \cap Q$ переходит в $s(P) \cap s(Q)$, т. е. в $P' \cap Q$. Иначе говоря, отрезок AB переходит в отрезок CD, и потому $|AB| = |CD|$.

Задача 2. Через точку A, данную внутри угла (меньшего, чем развернутый), провести прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится в этой точке пополам.

Решение. Обозначим через z симметрию относительно точки A, а через P и Q - прямые, на которых лежат стороны угла (рис. 3). В результате симметрии z прямая P переходит в параллельную ей прямую P' которая пересекает вторую сторону угла в точке C. Так как $C \in P'$, то точка D, симметричная C, принадлежит прямой, которая симметрична P', т.е. $D \in P$. Таким образом, точки $D \in P$ и $C \in Q$ симметричны относительно A, и потому отрезок CD делится в точке A пополам, т.е. прямая CD - искомая.

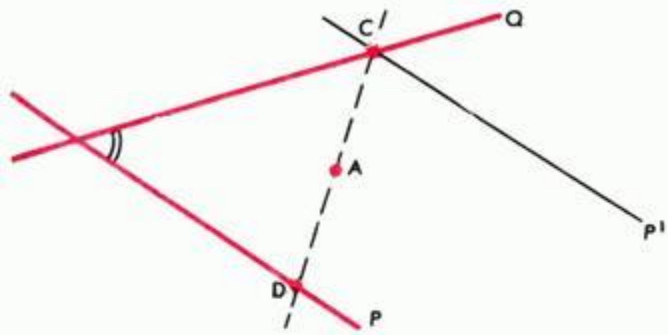


Рис. 3

Нетрудно понять, почему в задаче 1 была применена осевая, а в задаче 2 – центральная симметрия. Так как биссектриса угла – его ось симметрии, то попытка применить осевую симметрию в задаче 1 совершенно естественна (так же, как и применение центральной симметрии в задаче 2, поскольку отрезок CD должен делиться в точке A пополам, т.е. искомые точки C и D должны быть симметричными относительно точки A). И в других случаях анализ условия задачи позволяет найти движение, применение которого дает решение.

Задача 3. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABMQ$ и $BCPN$. Доказать, что отрезок MN перпендикулярен медиане BD треугольника ABC и вдвое длиннее этой медианы.

Решение. Попытаемся применить поворот на 90°, т. е. убедиться, что при повороте на 90° вокруг точки B (по часовой стрелке) отрезок MN перейдет в отрезок, параллельный BD и имеющий вдвое большую длину. При этом повороте [вектор]() $\overrightarrow{MB}$ переходит в $\overrightarrow{HB}$ (рис. 4), а вектор $\overrightarrow{BN}$ в $\overrightarrow{BC}$. Следовательно, [вектор]() $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ переходит в $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}$, т. е. в $\overrightarrow{HC}$. Но так как $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$. Итак, при повороте на 90°[вектор]() $\overrightarrow{MN}$ переходит в $\overrightarrow{HC}$, т.е. в вектор, равный $2\overrightarrow{BD}$. Отсюда вытекает, что $MN \perp BD$ и $|MN| = 2|BD|$.

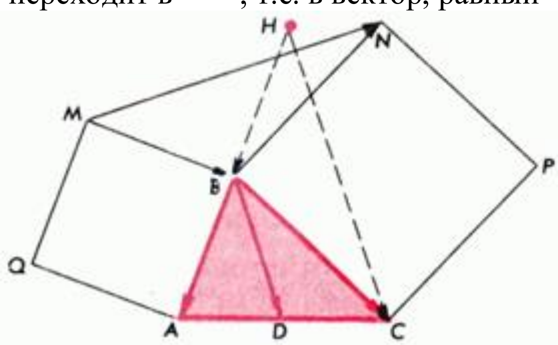


Рис. 4

2) Симметрия относительно плоскости.

Весьма существенна связь движений с ориентацией. На рис. 5 изображен [многоугольник]() F, на контуре которого задано положительное направление обхода (против часовой стрелки). При параллельном переносе получается многоугольник с тем же направлением обхода, т.е.

параллельный перенос сохраняет направление обхода, или, как говорят, сохраняет ориентацию. Поворот (в частности, центральная симметрия, представляющая собой поворот на 180°) также сохраняет ориентацию (рис. 6). Напротив, осевая симметрия меняет направление обхода на противоположное (рис. 7), т.е. меняет ориентацию. Другой пример движения, меняющего ориентацию – скользящая симметрия, т.е. композиция симметрии относительно некоторой прямой l и параллельного переноса, вектор которого параллелен l (рис. 8).

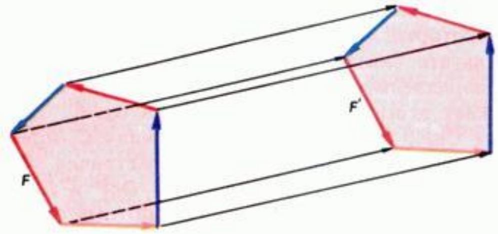


Рис. 5

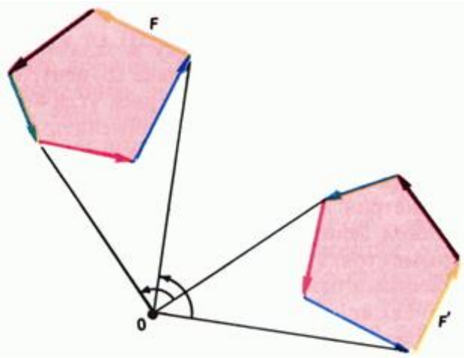


Рис.6

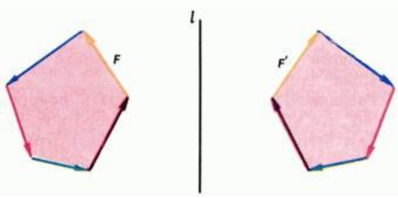


Рис. 7

Задания для практического занятия:

1) Найдите множество всех точек пространства, каждая из которых при симметрии относительно плоскости π отображается в себя.

2) Какие прямые при симметрии относительно плоскости отображаются в себя?

3) Укажите плоскости симметрии: отрезка, луча, прямой, равностороннего, равнобедренного треугольников.

4) Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

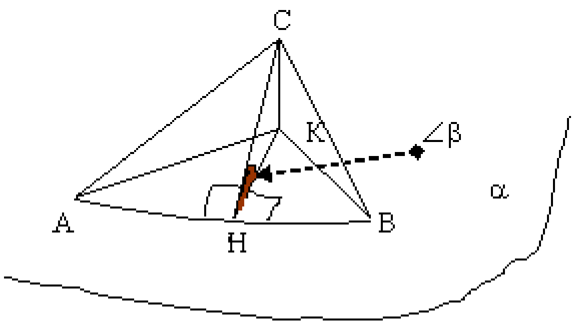
Практическое занятие №53. Площадь проекции плоской фигуры.

Цель:

– ознакомиться с основными понятиями стереометрии, основными способами вычисления площади проекции плоской фигуры, овладеть техникой решения геометрических задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Теорема. Площадь ортогональной проекции плоской фигуры на плоскость есть произведение площади самой фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.



Доказательство. Докажем теорему на примере треугольника. Пусть дана плоскость a и треугольник ABC. Рассмотрим общий случай, когда плоскость a и плоскость треугольника лежат под некоторым острым углом друг к другу. Для упрощения решения плоскость a проведем через одну из сторон треугольника, например, сторону AB. Значит после проектирования точки A и B передут в себя, а точка C переедет в точку K. В треугольнике ABC проведем высоту CH из вершины C. В треугольнике ABK соединим точки K и H. Прямая KH перпендикулярна прямой AB (KH – проекция прямой CH на плоскость a, CH ^ AB,? KH ^ AB по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, угол CHK – двугранный угол между плоскостями, обозначим его за b. Выразим площадь треугольников ABC и ABK и найдем их отношение:

$$S_{(ABC)}=\frac{1}{2}AB\cdot CH$$

$$S_{(ABK)}=\frac{1}{2}AB\cdot KH$$

$$\frac{S_{(ABK)}}{S_{(ABC)}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot KH}{\frac{1}{2}AB\cdot CH}=\frac{KH}{CH}=\cos\beta,$$

следовательно,

$$\boxed{S_{(ABK)}=S_{(ABC)}\cdot\cos\beta}$$

Задания для практического занятия:

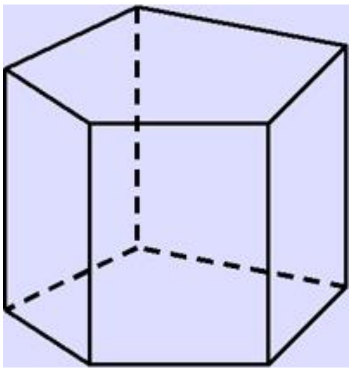
1. Площади проекций некоторого треугольника на координатные плоскости *Oxy* и *Oyz* равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$, а площадь проекции на плоскость *Oxz* – целое число. Найдите площадь самого треугольника, если известно, что она также является целым числом.
2. Найдите площадь плоского многоугольника, если площадь его проекции равна 20 $м^2$ и двугранный угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции равен 45^0.
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, а острый угол равен 60^0. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 30^0.
4. Изобразите в параллельной проекции правильную четырехугольную пирамиду.
5. Найдите площадь проекции круга на плоскость, образующую с плоскостью круга угол 30^0. Радиус круга равен 2 м.
6. Стороны треугольника равны 3,9 см, 4,1 см и 2,8 см. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 60^0.
7. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов, две противоположные грани которых параллельны плоскости изображения.

Практическое занятие №54. Призма. Параллелепипед. Куб.

Цель занятия:

- ознакомиться с основными многогранниками, их составляющими элементами, их изображениями, свойствами, основными способами вычисления их площадей и объемов, овладеть техникой решения геометрических задач.

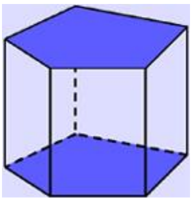
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

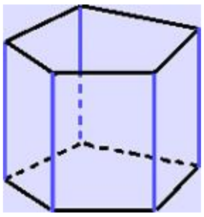


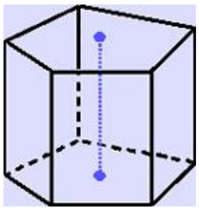
Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

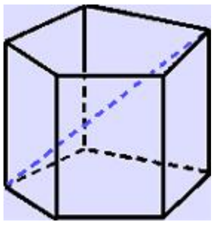
Элементы призмы:

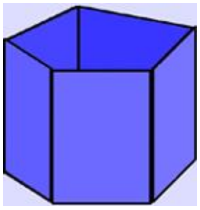
Основания Боковые ребра Высота Диагональ Боковые грани



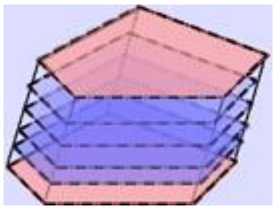




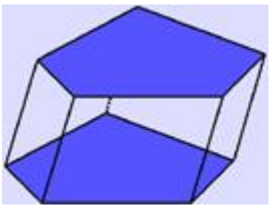




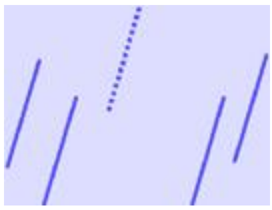
Свойства призмы:



 Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.



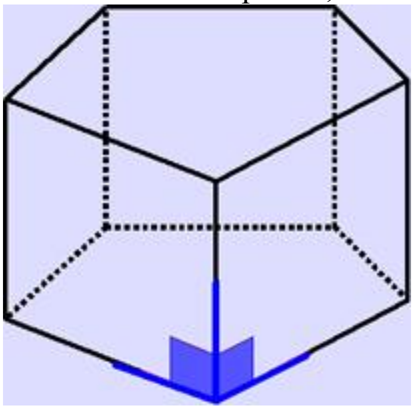
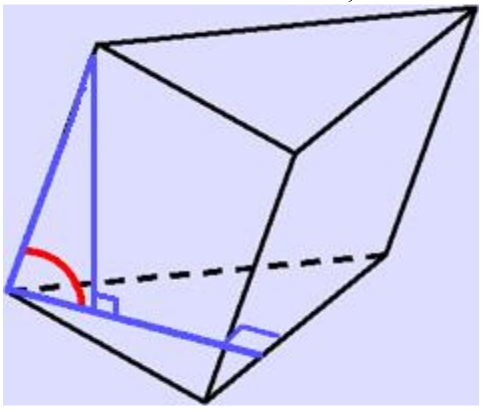
 Основания призмы равны.

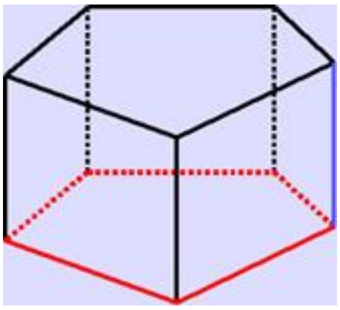


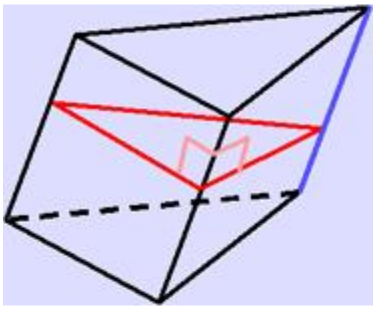
 У призмы боковые ребра параллельны и равны.

Виды призмы

Прямая призма:

Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Наклонная призма:
Призма называется наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

Правильная призма:
Прямая призма называется правильной, если ее основаниями являются правильные многоугольники.


Одним из частных случаев призмы является ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД
Площади
Полная поверхность призмы:
Полная площадь поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности и площадей оснований. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$
Площадь боковая поверхности призмы:
Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей боковых граней.
ПРЯМАЯ ПРИЗМА S=Pl

где
P - периметр основания
L - длина бокового ребра (высота)
НАКЛОННАЯ ПРИЗМА $S=P_{п}l$

 где

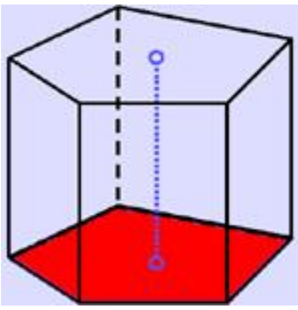
$P_п$ - периметр перпендикулярного сечения

L - длина бокового ребра

Объем

Объем призмы:

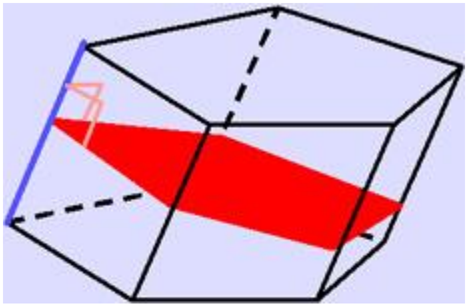
ПРЯМАЯ ПРИЗМА V=SH

 где

S - площадь основания призмы

H - высота призмы

НАКЛОННАЯ ПРИЗМА $V=S_пl$

 где

$S_п$ - площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы

L - длина ребра наклонной призмы

Задания для практического занятия:

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30^0, боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
3. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите полную поверхность призмы.
4. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см, угол между ними 60^0. Боковая поверхность равна 220 $см^2$. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

5.Одинарный красный кирпич российского производства имеет размеры: высота 65 мм, ширина 120 мм и длина 250 мм.

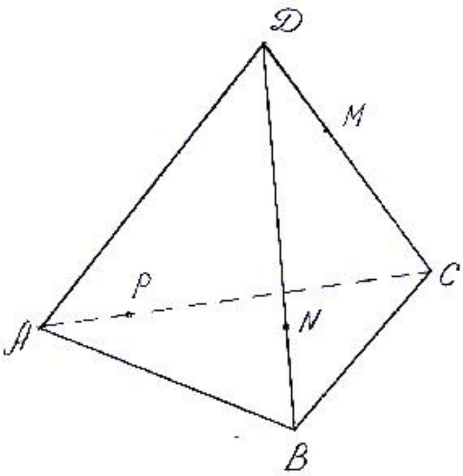
Сколько потребуется кирпичей для выкладки фундамента здания, если он имеет форму треугольной призмы высотой 50 см и основание – прямоугольный треугольник, один из катетов которого 6м, а гипотенуза образует с данным катетом угол в 60^0 . Кирпич укладывается на большую грань.

6. Сколько листов сайдинга шириной 0,23м и длиной 3,68м необходимо купить для обшивки дома, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда длиной 12 м, шириной 6 м и высотой 3 м.

Практическое занятие №55, №56. Сечение куба, призмы и пирамиды.
Цель:
- ознакомиться с основными видами сечений куба, призмы и пирамиды, их изображениями, свойствами, основными методами построения сечений многогранников, овладеть техникой построения сечений многогранников.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Сечением называется пересечение фигуры с данной плоскостью.
Существует три основных метода построения сечений многогранников: метод следов, метод вспомогательных сечений, комбинированный метод.
Метод следов заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника. Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника.
Метод вспомогательных сечений построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь ввиду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скученными”. Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.
Метод следов и метод вспомогательных сечений являются разновидностями аксиоматического метода построения сечений многогранников плоскостью.
Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.
В основе построения сечения методом следов лежат две теоремы:
1. если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости;
2. если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна первой прямой.
Задания для практического занятия:
1. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону ВС и вершину D_1.



2. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in A_1B_1$, $N \in AD$, $P \in CD$.
3. Построить сечение тетраэдра *DABC* плоскостью, проходящей через точки *M, N, P* (точки указаны на чертеже).
4. Построить сечение четырёхугольной пирамиды *ABCDS* плоскостью, проходящей через точки $K \in DC$, $N \in BS$, $M \in (ABC)$.
5. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через точки $M \in CC_1$, $K \in BB_1$, $N \in DD_1$.

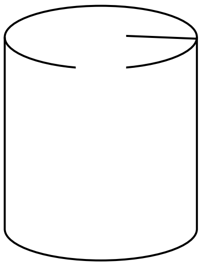
6. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных рёбер куба, и наиболее удалённую от соединяющей их прямую вершину куба.

Практическое занятие №57. Цилиндр. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.
Цель:

– ознакомиться с основными видами сечений цилиндра, их изображениями, свойствами, основными методами построения сечений цилиндра, овладеть техникой построения сечений цилиндра.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

При построении цилиндра:
Изображение цилиндра лучше начинать с построения осевого сечения цилиндра, в котором нижнее основание изображено штриховой линией.
Приняв верхнее и нижнее основания прямоугольника за диаметр цилиндра, рисуют равные эллипсы, при этом в нижнем основании невидимую часть эллипса изображают штриховой линией.



h – высота цилиндра, r – радиус основания

Сечением называется пересечение фигуры с данной плоскостью.
Существует три основных метода построения сечений многогранников: метод следов, метод вспомогательных сечений, комбинированный метод.
Метод следов заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника. Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника.
Метод вспомогательных сечений построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь ввиду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скученными”. Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.
Метод следов и метод вспомогательных сечений являются разновидностями аксиоматического метода построения сечений многогранников плоскостью.
Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.
В основе построения сечения методом следов лежат две теоремы:
1. если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости;
2. если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна первой прямой.
Задания для практического занятия:
1.Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если
R=2 см и $\alpha = 30^0$.

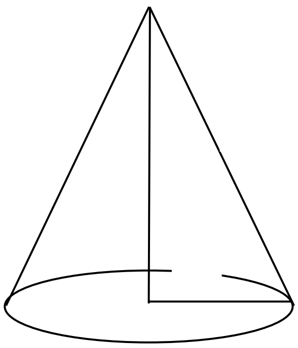
2. Вычислите отношение площади сечения, проведенного на расстоянии m от центра сферы, к площади большого круга. Радиус сферы равен R.
3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB = 13 см, BC = 14 см, CA = 15 см.
4. Расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 2 см. Вычислите радиус шара, если площадь сечения равна 12 см^2.
5. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB = 6 см, BC = 8 см, AC = 10 см.
6. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?
7. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.
8. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 20 см. Найти высоту цилиндра и площадь основания цилиндра.

Практическое занятие №58. Конус и усеченный конус. Их осевые сечения и сечения, параллельные основанию.
Цель:

– ознакомиться с основными видами сечений конуса, их изображениями, свойствами, основными методами построения сечений конуса, овладеть техникой построения сечений конуса.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

При построении конуса:
Надо сначала провести диаметр основания конуса штриховой линией, а затем из его середины провести перпендикуляр – высоту конуса; отметить на перпендикуляре вершину конуса;
Нарисовать в основании эллипс, изображая штриховой линией его невидимую часть. Соединить концы диаметра с вершиной конуса. Если нужно - провести осевое сечение, отметить необходимые по условию задачи элементы.



h– высота конуса, *r* - радиус основания, *l* - образующая конуса.

Задания для практического занятия:

1. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 дм^2, высота конуса равна 1,2 дм. Вычислите площадь основания и образующую конуса.

2. Угол между образующей и осью конуса равен 45^o , образующая равна 6,5 см. Найти площадь боковой поверхности конуса и площадь основания.

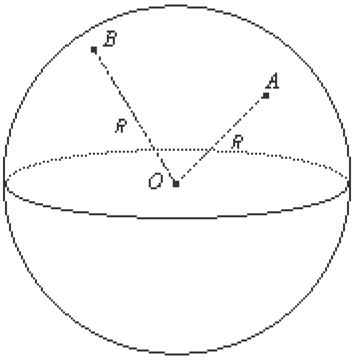
Практическое занятие №59. Шар и сфера, их сечения.

Цель:

– ознакомиться с основными видами сечений шара и сферы, их изображениями, свойствами, основными методами построения сечений шара и сферы, овладеть техникой построения сечений шара и сферы.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

ОПРЕДЕЛЕНИЯ:



Шаром с центром в точке O и радиуса R называется множество всех точек пространства, находящихся от точки O на расстоянии, не превосходящем R.

Сфера W(O,R) называется границей шара.

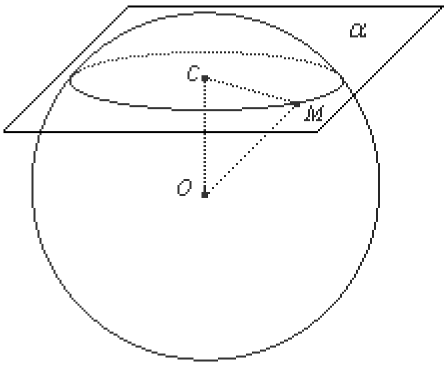
Радиусом, хордой и диаметром шара называется радиус, хорда и диаметр сферы, которая является границей шара.

ТЕОРЕМА: *Об объёме шара*

Объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V_{шара} = 4$
$3\pi R^3$

ТЕОРЕМА:

О сечении сферы плоскостью



Сечение сферы плоскостью есть окружность.

Пусть плоскость α пересекает сферу W(O,R). Из центра O опустим перпендикуляр OC на плоскость α.

Соединим произвольную точку M линии пересечения плоскости α со сферой W(O,R) с точками O и C. Т.к. $OC \perp \alpha$, то $OC \perp CM$.

В прямоугольном треугольнике ΔOCM $CM^2 = OM^2 - OC^2$. Т.к. OM и OC - величины постоянные, то и CM - величина постоянная. Таким образом все точки линии пересечения плоскости α и сферы W(O,R) равноудалены от точки C, поэтому эта линия пересечения является окружностью с центром в точке C и радиусом r = CM.

СЛЕДСТВИЕ:

Сечение шара плоскостью есть круг, а основание перпендикуляра проведенного из центра шара к пересекаемой плоскости есть центр круга, полученного в сечении.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

Плоскость, проходящая через центр сферы (шара) называется диаметральной плоскостью.

Сечение сферы (шара) диаметральной плоскостью называется большой окружностью (большим кругом).

Плоскость и сфера (шар) радиуса R имеют общие точки, если выполняется неравенство $d \le R$ (d - расстояние от центра сферы (шара) до плоскости).

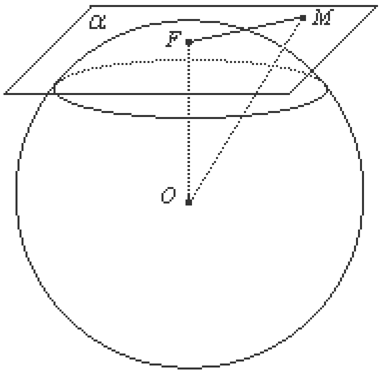
ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

Касательной плоскостью к сфере называется плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Касательной плоскостью к шару называется касательная плоскость к сфере, которая является границей этого шара.

ТЕОРЕМА:

Признак касательной плоскости



Пусть OF - радиус сферы W(O,R), точка $F \in \alpha$, $\alpha \perp OF$. Плоскость, перпендикулярная радиусу сферы и проходящая через его конец, лежащий на сфере касается сферы.

Пусть M - произвольная точка плоскости α. По условию $OF \perp \alpha$, следовательно OM - наклонная к плоскости α, и поэтому OM>OF, т.е. OM>R. Следовательно точка M не может лежать на сфере, значит плоскость α имеет со сферой только одну общую точку F, т.е. касается сферы в точке F.

ТЕОРЕМА:

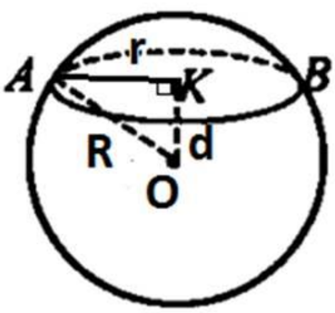
О свойстве касательной плоскости к сфере

Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Пусть плоскость α касается сферы W(O,R) в точке F. По определению касательной плоскости точка F является единственной общей точкой плоскости α и сферы W(O,R). Следовательно любая другая точка M плоскости α лежит вне сферы, и поэтому OM > OF. Значит, длина отрезка OF - расстояние от центра O до плоскости α, т.е. $OF \perp \alpha$.

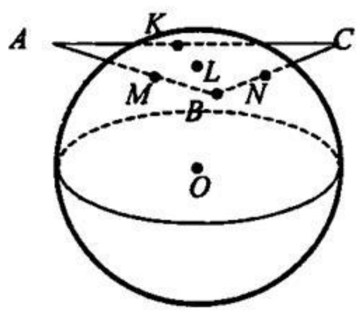
Задания для практического занятия:

1. Сфера радиуса 2 пересечена плоскостью, удалённой от центра на расстояние 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удалёнными точками сечения



2. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения. (см.рис)

3.Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 14 см, 14 см и 15 см (см. рис.).



4. Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

Практическое занятие №60, №61. Вычисление объемов многогранников и тел вращения. Интегральная формула объема.

Цель:

- ознакомиться с основными видами многогранников и тел вращения, их изображениями, свойствами, основными формулами вычисления объемов многогранников и тел вращения, интегральной формулой объема, овладеть техникой вычисления объемов многогранников и тел вращения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы
по теме практической работы:

Объем — величина, сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Для объемов пространственных фигур справедливы свойства:

Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.

Равные фигуры имеют равные объемы.

Если фигура Ф составлена из двух неперекрывающихся фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры Ф равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т.е. $V(Ф)=V(Ф_1) + V(Ф_2)$.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются равновеликими. Основные формулы

Произвольная призма ($P_{сеч}$, $S_{сеч}$ — периметр и площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро, H — высота): $S_б = P_{сеч} \cdot l$, $V = S_{осн} \cdot H$, $V = S_{сеч} \cdot l$

Прямая призма: $S_{пп} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $S_{бок} = P \cdot H$, $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $V = S_{осн} \cdot H$

Прямоугольный параллелепипед (a, b, c — его измерения, d — диагональ): $S_б = P_{сеч} \cdot H$, $S_{полн} = 2(ab + ac + bc)$ $V = S_{осн} \cdot H$, $V = abc$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Куб: $V = a^3$, $S_{полн} = 6a^2$.

Произвольная пирамида (S_i — площади боковых граней, S — площадь основания и h — высота; P — периметр основания, l — боковое ребро):

$$V = \frac{1}{3}Sh, \qquad S_b = \sum_i S_i, \qquad S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot l, \qquad S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Правильная пирамида (P — периметр основания, H — высота, $h_{бок}$ — апофема)

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot h_{бок}, \qquad S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}, \text{ где } \alpha - \text{двугранный угол при основании},$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}, \qquad V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot \mathrm{H}.$$

Произвольная усеченная пирамида:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

$$\text{где } H - \text{высота}, S_1 \text{ и } S_2 - \text{площади оснований},$$

$$V - \text{объем}.$$

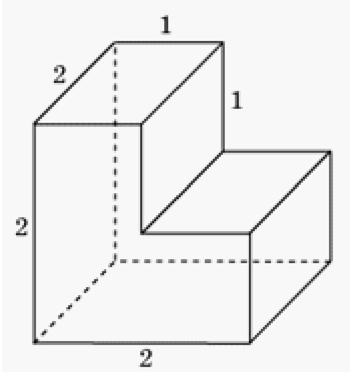
Правильная усеченная пирамида:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h$$

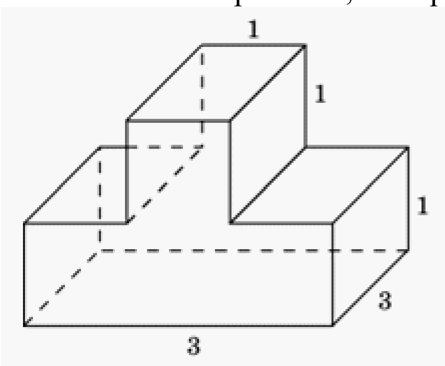
$$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2,$$

$$\text{где } h - \text{апофема}, P_1 \text{ и } P_2 - \text{периметры оснований}$$

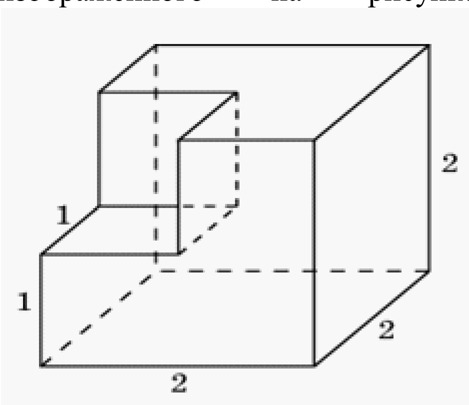
Параллелепипед и куб Пример 1.Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



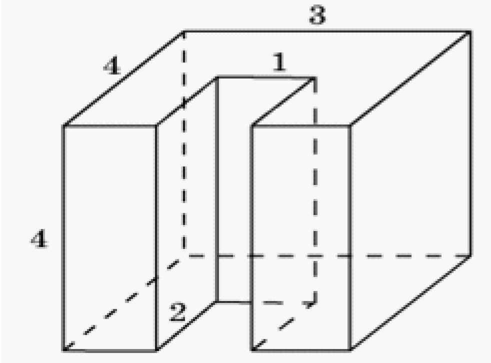
Решение 1.Многогранник состоит из двух прямоугольных параллелепипедов, объемы которых равны $2·1·1 = 2$ и $2·2·1 = 4$. Следовательно, объем многогранника равен $2 + 4 = 6$.Решение 2.Многогранник получается из куба, объем которого равен $2^3 = 8$, вырезанием прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен $2·1·1 = 2$. Следовательно, объем многогранника равен $8 – 2 = 6$.Ответ: 6.Пример 2.Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



Решение. Многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов, объемы которых равны $3·3·1 = 9$ и $3·1·1 = 3$. Следовательно, объем многогранника равен $9 + 3 = 12$.Ответ: 12.Пример 3.Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

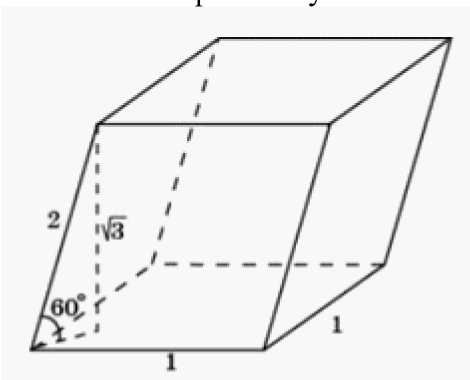


Решение. Многогранник получается из куба, объем которого равен 8, вырезанием куба, объем которого равен 1. Следовательно, объем многогранника равен 7.Ответ: 7.Пример 4.Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.



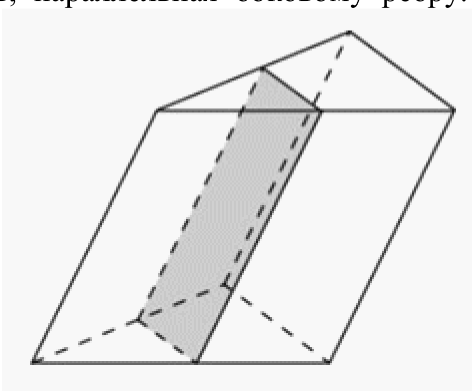
Решение. Многогранник получается

из прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$, вырезанием прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Следовательно, объем многогранника равен 48 – 8 = 40.Ответ: 40.Пример 5.Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2 . Найдите его объем. Решение. Поскольку куб имеет шесть одинаковых граней, найдем площадь одной из них: 24 / 6 = 4 см^2.Зная площадь грани куба, найдем величину ребра а = $\sqrt{4}$ = 2 см. Тогда его объем равен $V = a^3 = 2^3 = 8$ см^3 .Ответ: 8.Пример 6.В прямоугольном параллелепипеде ребра изменены следующим образом: длина и ширина увеличены в 2 раза, высота уменьшена в 6 раз. Как изменится площадь его боковой поверхности и объем при заданном изменении .Решение.Пусть измерения параллелепипеда a, b, c. Тогда его площадь боковой поверхности $S_б = P_{осн} \cdot h = 2c(a + b)$. Проследим, как изменится площадь боковой поверхности при заданном в задаче преобразовании: $2\frac{c}{6}(2a+2b) = \frac{2c}{3}(a+b) = \frac{S_б}{3}.$ Таким образом, площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда уменьшилась в три раза. До преобразования объем был равен $V = abc$. После преобразования получаем $2a2b\frac{c}{6} = \frac{2}{3}V.$ Следовательно, объем новой фигуры составляет 2/3 от объема начальной фигуры .Ответ: площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда уменьшилась в 3 раза; объем прямоугольного параллелепипеда уменьшился в 2/3 раза. Пример 7.Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда. Решение.

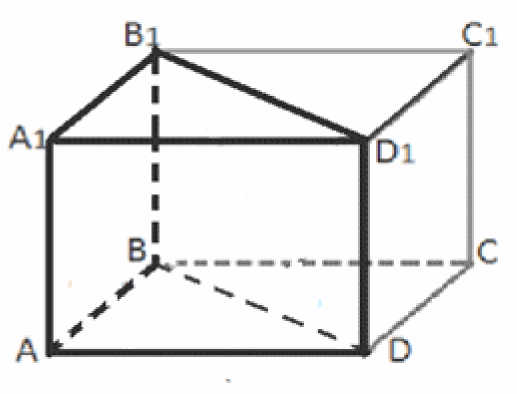


Площадь грани параллелепипеда, являющейся ромбом со стороной 1 и острым углом 60°, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Высота, опущенная на эту грань, равна $2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}.$ Объем параллелепипеда равен 1,5.Ответ: 1,5.ПризмаПример 8.Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

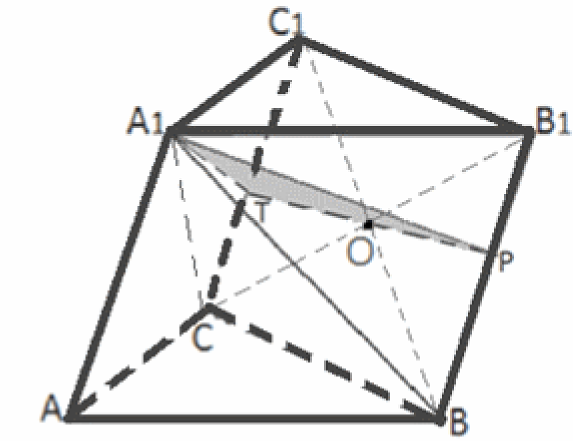
Решение.

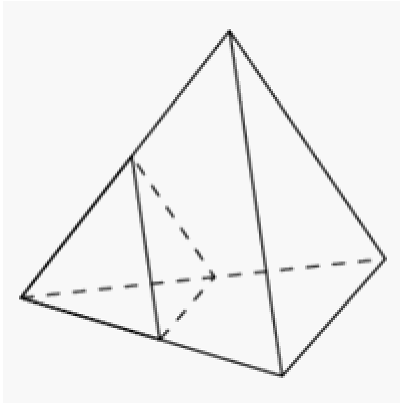


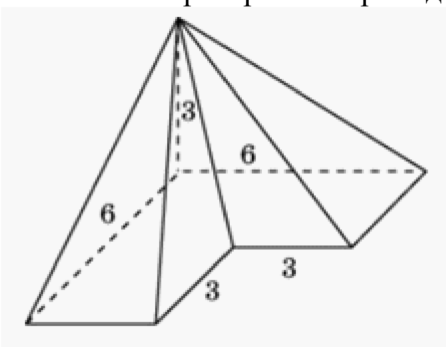
Площадь основания отсеченной призмы равна четверти площади основания исходной призмы. Высота отсеченной призмы равна высоте исходной призмы. Следовательно, объем отсеченной призмы равен четверти объема исходной призмы, т.е. равен 8.Ответ: 8.Пример 9.Пусть Q — площадь одной из боковых граней треугольной призмы, d — расстояние от противоположного ребра до этой грани. Тогда объем



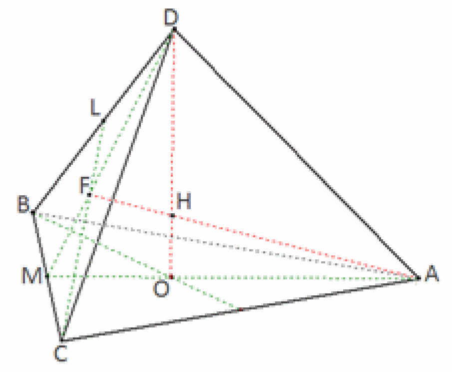
этой призмы можно найти по формуле: V = 1/2Qd.
Доказательство: Пусть площадь грани AA_1D_1D равна Q, а расстояние от BB_1 до этой грани равно d. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $V_{п-да}$ = Qd. Так как объем параллелепипеда в 2 раза больше объема призмы $ABDA_1B_1D_1$, то объем этой призмы: V =



1/2Qd. Пример 10.Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны по 60°.Найти объем призмы , если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.Решение. Так как все ребра равны, то все боковые грани призмы — ромбы, а основания — правильные треугольники. Боковые грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 – ромбы с углом 60°, поэтому обозначим $BA_1 = CA_1 = CB_1 = x$. Площадь грани ABB_1A_1 равна $S = x^2\sin 60 = x^2\sqrt{3} / 2$. Из условия получаем уравнение: $x^2\sqrt{3} / 2 = 8\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$.Объем призмы найдем по формуле: $V_п = S_\perp \cdot L$, где $S_\perp$ — площадь перпендикулярного сечения, L — длина бокового ребра. Построим перпендикулярное сечение A_1PT, где P и T — середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Так как треугольники A_1BB_1 и A_1CC_1правильные, то их медианы являются высотами, поэтому $A_1P \perp BB_1$, $A_1T \perp CC_1$. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости все боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости A_1PT, т.е. A_1PT — перпендикулярное сечение данной призмы. В $\triangle A_1PT$: $A_1O \perp PT$, $PT = x = 4$, $A_1P = x\sqrt{3} / 2$, $A_1O = \sqrt{A_1P^2 - PO^2} = x\sqrt{2} / 2$.Следовательно, площадь перпендикулярного сечения $SA_1PT = 1/2PT\cdot A_1O = x^2\sqrt{2} / 2$.Тогда объем призмы $V = SA_1PT\cdot AA_1 = x^3\sqrt{2} / 4 = 4^3\sqrt{2} / 4 = 16\sqrt{2}$.Ответ: $16\sqrt{2}$.Пирамида Пример 11.Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза? Решение.  Воспользуемся тем, что если два тетраэдра подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение объемов этих тетраэдров равно k^3. Если ребра тетраэдра увеличить в два раза, то объем тетраэдра увеличится в 8 раз. Ответ: 8.Пример 12.Найти объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



Решение. Площадь основания пирамиды равна 36 – 9 = 27, высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды равен V = 27·3/3 = 27.Ответ: 27.Пример 13.Найти объем правильного тетраэдра, все ребра которого равны b. Решение.



DO = h — высота тетраэдра.

$$DH : HO = 3:1, \qquad DH = \frac{3}{4}DO, \qquad HO = \frac{1}{4}DO.$$

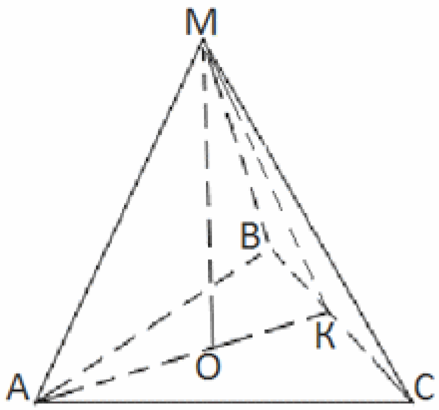
$$\triangle DOM: \qquad DM = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \qquad OM = \frac{1}{3}AM = \frac{b\sqrt{3}}{6}.$$

$$h = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2} = b\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$S_{осн} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot h = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b\sqrt{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}.$$

Ответ: $\frac{b^3\sqrt{2}}{12}$. Пример 14.В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60 градусов. Расстояние от центра основания до боковой грани равно 2 $\sqrt{3}$. Найти объём пирамиды.



Решение. Основанием правильной треугольной пирамиды по определению является равносторонний треугольник. А расстояние от центра основания до боковой грани равно радиусу вписанной окружности. Площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2,$$

равна: $S = 3\sqrt{3}r^2 = 3\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 36\sqrt{3}.$ Поскольку грани наклонены к основанию под углом 60 градусов, то для прямоугольного треугольника MOK:tg MKO = MO/KO; tg 60 = MO / (2 $\sqrt{3}$) ; $\sqrt{3}$ = MO / (2 $\sqrt{3}$); MO = 6 см — высота пирамиды. Объем пирамиды найдем по формуле: S = 1/3 S·h; S = 1/3·36 $\sqrt{3}$ ·6 ; S = 72 $\sqrt{3}$ Ответ: 72 $\sqrt{3}$.Пример 15.Найти объем пирамиды, все грани которой равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 5, и основанием — 6.Решение.Пусть в пирамиде основанием является $\triangle$ABC, в котором AB=AC=5, BC = 6. По теореме косинусов $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 50 - 36 > 0$, поэтому $\triangle$ABC — остроугольный. Если AD = 5, то DC = 6, что противоречит условию, поскольку грань BCD не будет равнобедренным треугольником со сторонами 5, 5, 6. Следовательно, AD = 6, тогда DC = DB = 5. Сделаем

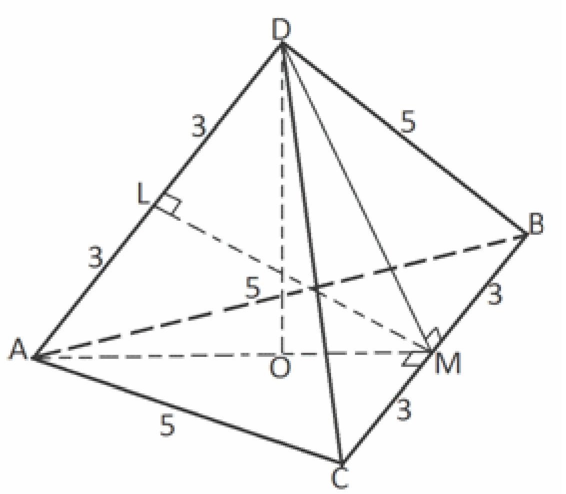
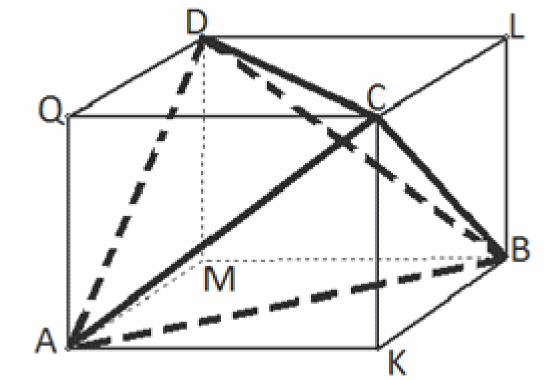


рисунок. Пусть M и L — середины ребер BC и AD соответственно. Тогда AM и DM — медианы в равных равнобедренных треугольниках с общим основанием BC, проведенные к этому основанию. Следовательно, DM $\perp$ BC, AM $\perp$ BC и AM = DM. По теореме Пифагора из $\triangle$ AMC: $AM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Значит, AM = DM =4.Отсюда следует, что $\triangle$ADM — равнобедренный и его медиана ML — общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым BC и AD и , следовательно, его длина — расстояние между прямыми BC и AD. Кроме того по признаку перпендикулярности плоскостей, ABC $\perp$ ADM, и , следовательно, высота DO $\triangle$ ADM будет являться высотой пирамиды. Из прямоугольного $\triangle$ AML: $ML = \sqrt{AM^2 - AL^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены. Следовательно, ML· AD = DO· AM, $\sqrt{7}$ ·6 = DO·4, DO = 3 $\sqrt{7}$ / 2.Площадь основания S_{ABC} равна удвоенной площади $\triangle$AMC и равна S_{ABC} = $2S_{AMC}$ = 2·1/2·AM·MC = 4·3 = 12.V = 1/3 · S_{ABC} · DO = 12·3 $\sqrt{7}$ / (2·3) = 6 $\sqrt{7}$.Ответ: 6 $\sqrt{7}$.Пример 16.Пусть a и b — длины двух противоположных ребер тетраэдра, d — расстояние между ними, α — угол между ними. Тогда объем тетраэдра можно вычислить по формуле: V = 1/6



abd·sin α . Доказательство: Достроим данный тетраэдр ABCD до параллелепипеда AKBMQCLD, проводя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Пусть AB = a, CD = b, тогда площади граней AKBM и LCQD равны S = 1/2·ab·sin α . Расстояние между ними d. Тогда объем параллелепипеда равен: $V_{п\text{-}да}$ =1/2· abd·sin α . Объем пирамиды составляет 1/3 от объема параллелепипеда, т.е.V = 1/6 abd·sin α .

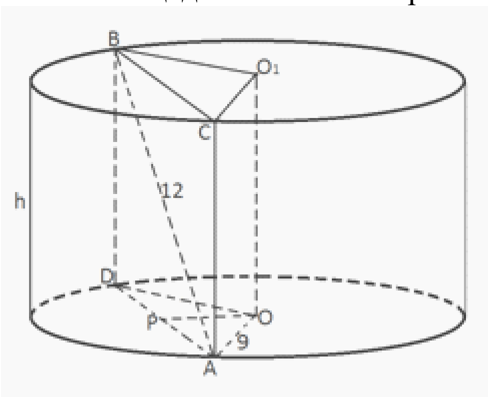
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

Основные формулы

Цилиндр:$S_б = 2\pi RH$; $S_{пп} = 2\pi R(R + H)$ (*R* — радиус основания, *H* — высота)

Конус:$S_б = \pi RL$; $S_{пп} = \pi RL + \pi R^2$ (*R* — радиус основания, *L* — образующая)

Усеченный конус :$S_б = \pi(R+r)L$; $S_{пп} = \pi(R+r)L + \pi R^2 + \pi r^2$($R$, r — радиусы оснований)
Шар :$S_п = 4\pi R^2$; $S_{сегм} = 2\pi RH$ (R — радиус, H — высота сегмента)
Цилиндр Пример 1.Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота — h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если $r = 9$ *дм*, $d = 7$*дм*, $AB = 12$ *дм*. *Решение*.



$S_б = 2\pi rh$. Для решения задачи надо найти высоту $h = BD$. Через точку A, лежащую на окружности основания с центром в точке O, проведем образующую. Пусть она пересекает окружность основания с центром в точке O_1 в точке C. Плоскость ABC параллельна оси OO_1 цилиндра, поэтому расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно расстоянию от оси до плоскости ABC, т.е. опущенный перпендикуляр $OP = d$.Из прямоугольного $\triangle OAP$ находим $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{r^2 - d^2}$. $\triangle DOA$ — равнобедренный, поэтому $AD = 2AP = 2\sqrt{r^2 - d^2}$. Из прямоугольного $\triangle ABD$ находим $h = BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - 4r^2 + 4d^2}$;
$h = \sqrt{12^2 - 4\cdot 9^2 + 4\cdot 7^2} = \sqrt{144 - 324 + 196} = 4$. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра $S_б = 2\pi RH = 2\pi\cdot 9\cdot 4 = 72\pi$.*Ответ*: 72π.

Пример 2.Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найти площадь его осевого сечения.

Решение. В этой задаче чертеж не обязателен. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_б = 2\pi RH$, а площадь осевого сечения $S_{сеч} = 2RH$.По условию $2\pi RH = S$, отсюда $2RH = S/\pi$. *Ответ*: S/π.

Пример 3.Рассматриваются все цилиндры, имеющие периметр осевого сечения, равный $2p$. Найти высоту того цилиндра, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

Решение.

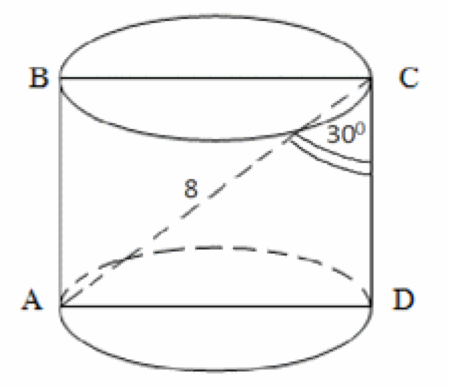
Обозначим r и h радиус и высоту цилиндра, периметр осевого сечения которого равен $2p$. Тогда $2r + h = p \Rightarrow 2r = p - h$.

Площадь боковой поверхности цилиндра выразим по формуле $S = 2\pi rh = \pi h(p - h) = \pi(ph - h^2)$, где $0 < h < p$. Величина S меняется в зависимости от h и , следовательно, является функцией h, при условии $0 < h < p$. В нашем случае функция площадь боковой поверхности является квадратичной функцией от h. Из свойств квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом следует, что такая функция достигает своего наибольшего значения при $h = [x = -b/2a] = -p/(-2) = p/2$.

Итак, при заданном периметре осевого сечения, наибольшую площадь боковой поверхности будет иметь тот цилиндр, у которого высота равна *четверти* периметра осевого сечения.

Ответ: $h = p/2$.Замечание. Посмотрим, как относятся высота и диаметр цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения. Мы знаем, что высота h такого цилиндра равна четверти периметра осевого сечения, т.е. $h = p/2$. Подставим это значение в равенство $2r + h = p$. Получим $2r + p/2 = p$; $p/2 = 2r$, т.е. $2r = h$. Следовательно, осевое сечение цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения, — квадрат.

Пример 4.Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная 8 см, составляет с образующей цилиндра угол величиной 30 градусов.



Решение. Поскольку $AC = 8$ *см, а* $\angle ACD = 30°$, то $CD = AC \cos 30°$, $CD = 8\cdot \sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}$ Аналогично, $AD = AC \sin 30°$, $AD = 8 \cdot 1/2 = 4$.Откуда радиус основания цилиндра равен $R = AD/2 = 4/2 = 2$ *см*.Площадь основания цилиндра, соответственно, равна $S_o = \pi R^2 = 4\pi$ *см*^{2}.Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_б = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$ *см*^{2}.Площадь полной поверхности цилиндра равна: $S_{пп} = 2S_o + S_б = 2\cdot 4\pi + 16\pi\sqrt{3} = 8\pi + 16\pi\sqrt{3}$ *см*^{2}.*Ответ*: $8\pi + 16\pi\sqrt{3}$.Конус.

Пример 5.Высота конуса равна 5см, а радиус основания 12см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение. Для нахождения площади полной поверхности конуса воспользуемся следующими формулами: $S_б = \pi RL$, $S_o = \pi R^2$, $S_{пп} = S_б + S_o$.Поскольку высота конуса h, радиус основания конуса R и образующая L являются сторонами прямоугольного треугольника, то $L^2 = h^2 + R^2$

$$S_б = \pi R\sqrt{h^2 + R^2};$$

$$S_{пп} = S_б + S_o = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} + \pi R^2;$$

$$S_{пп} = \pi \cdot 12\sqrt{5^2 + 12^2} + \pi 12^2 = 12\pi\sqrt{169} + 144\pi = 156\pi + 144\pi = 300\pi \ см^2.$$

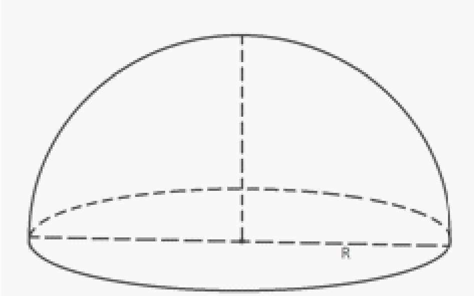
Ответ: 300π .

Пример 6 .Площадь основания конуса 36π см^2 , а его образующая 10 см. Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение.Зная площадь основания, найдем его радиус.$S = \pi R^2$; $36\pi = \pi R^2$; $R^2 = 36$; $R = 6$ *см*.Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле: $S_б = \pi RL$ $S_б = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ *см*^{2}.*Ответ*: 60π см^2 .

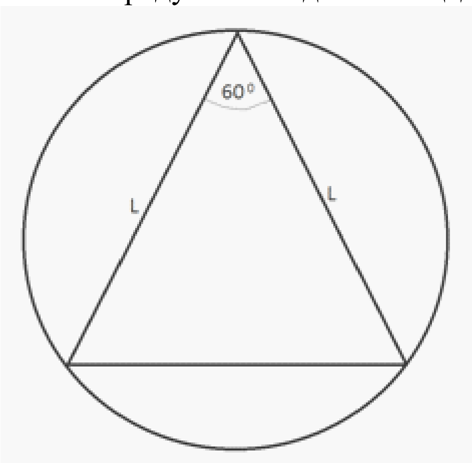
Шар

Пример 7.Емкость имеет форму полусферы (полушара). Длина окружности основания равна 46 см. На 1 квадратный метр расходуется 300 граммов краски. Сколько необходимо краски, чтобы покрасить емкость?

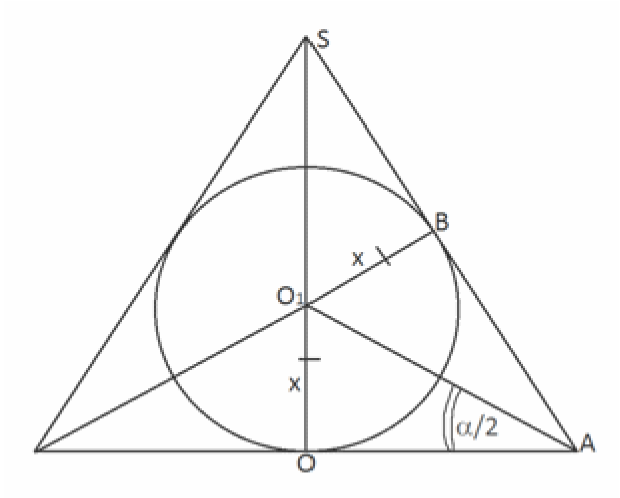
Решение. 

Площадь поверхности фигуры будет равна половине площади сферы и площади сечения сферы. Поскольку нам известна длина окружности основания, найдем ее радиус: $L = 2\pi R \Rightarrow R = L / 2\pi$; $R = 46 / 2\pi$; $R = 23/\pi$. Тогда площадь основания равна $S_o = \pi R^2$ или $S_o = \pi (23/\pi)^2$; $S_o = 529 / \pi$. Площадь сферы найдем по формуле: $S_{сф} = 4\pi R^2$. А площадь полусферы $S_{п/сф} = 4\pi R^2/ 2$ или $S_{п/сф} = 2\pi (23/\pi)^2$; $S_{п/сф} = 1058 / \pi$. Общая площадь поверхности фигуры равна: $S_{пп} = S_o + S_{п/сф} = 529 / \pi + 1058 / \pi = 1587/ \pi$ см^2. Теперь вычислим расход краски (учтем, что расход дан на квадратный метр, а вычисленное значение в квадратных сантиметрах, то есть $1\ м^2 = 10\ 000\ см^2$). $1587 / \pi \cdot 300 / 10\ 000 = 47{,}61 / \pi \approx 15{,}15$ г. *Ответ*: 15,15. Комбинации тел вращения

Пример 8. В сферу вписан конус, образующая которого равна L, а угол при вершине осевого сечения равен 60 градусов. Найдите площадь сферы.

Решение. 

Площадь сферы найдем по формуле: $S = 4\pi r^2$. Поскольку в сферу вписан конус, проведем сечение через вершину конуса, которое будет равнобедренным треугольником. Поскольку угол при вершине осевого сечения равен 60°, то треугольник — равносторонний (сумма углов треугольника — 180°, значит остальные углы $(180-60)/ 2 = 60°$, то есть все углы равны). Заметим, что радиус сферы равен радиусу окружности, описанного вокруг равностороннего треугольника. Сторона треугольника по условию равна L, тогда по формуле $a_n = 2R\sin(180°) / n$ получим $R = L / (2\sin 60) = \sqrt{3} L /3$. Таким образом площадь сферы $S = 4\pi (\sqrt{3} L /3)^2$, $S = 4\pi L^2/3$. *Ответ*: $4\pi L^2/3$. Пример 9. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k. *Дано*: $S_ш / S_{o\ кон} = k$. Найти $\cos\angle SAO = \cos\alpha$. *Решение*.



Изобразим осевое сечение конуса. Обозначим $OO_1 = x$, $\angle O_1AO = \alpha/2$. $\triangle O_1AO$: $\operatorname{tg}(\alpha/2) = x/OA \Rightarrow OA = x\cdot\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

$$\frac{S_ш}{S_{о\ кон}} = \frac{4\pi x^2}{\pi\left(x\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = k; \qquad \frac{4\pi x^2}{\pi x^2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = k; \qquad \frac{4}{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = k;$$

$$4\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k; \qquad \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{k}{4}; \qquad \cos\alpha = \frac{4-k}{4+k}.$$

Отсюда следует (т.к. α — острый угол), что $0 < k < 4$. *Ответ*: $\cos\alpha = \dfrac{4-k}{4+k}$, $0 < k < 4$.

Для тел вращения объем вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x)dx$.

Вычислим объемы наклонной призмы, пирамиды, конуса, шара, шарового сегмента.

Допущения:

- В сечении фигуры получается окружность или многоугольник;
- Площади сечения и площади основания пропорциональны квадратам расстояний от начала координат;
- Всякое сечение призмы параллельное основанию призмы равно основанию.

Общие направления:

Рис.1

1. Выбираем начало координат O и проводим ось OX;
2. Выбираем пределы интегрирования;
3. Вычисляем объем тел по интегральной формуле.

Применим данный алгоритм к выбранным объектам.

Вычисление объема наклонной призмы

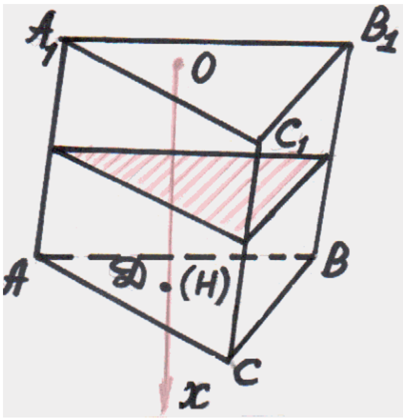


Рис. 2

1. Дано:

наклонная призма

Q – площадь основания

H – высота

Доказать:

V=QH

Действуем согласно алгоритму:

1. O – выбираем произвольно и проводим $OX \perp (ABC)$ основанию
2. *a*=0; *b*=*H*; Q – const.
3. $V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H Qdx = Qx\Big|_0^H = QH$

$V = QH$

Вычисление объема пирамиды

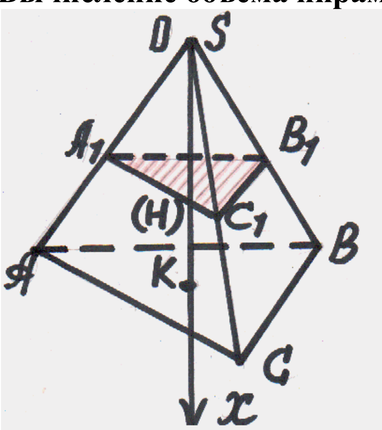


Рис. 3

Дано:

Пирамида

Q – площадь основания;

H – высота

Доказать:

$V = \frac{1}{3}QH$

Действуем согласно алгоритму:

1. *0* – выбираем в вершине пирамиды, проводим $OX \perp (ABC)$ основанию
2. пределы интегрирования $a = 0; b = H$.

. 3. $V = \frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2} \Rightarrow S(x) = \frac{Qx^2}{H^2}$; тогда $V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{Qx^2}{H^2}dx = \frac{Qx^3}{H^2 3}\Big|_0^H = \frac{QH^3}{H^2 3} = \frac{QH}{3}$

$V = \frac{1}{3}QH$

Вычисление объема конуса

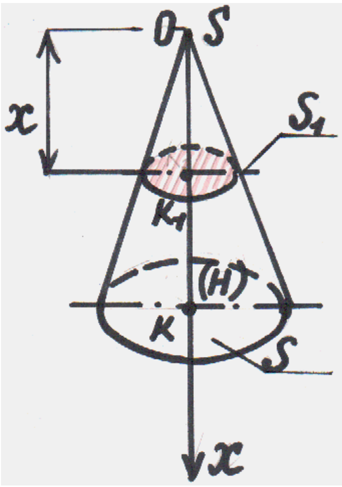


Рис. 4

Дано:

Конус,

Q – площадь основания

H – высота

Доказать:

$V = \frac{1}{3}QH$

По алгоритму:

1. 0;
2. a=0, b=H

$$\frac{S_1}{Q_{осн}} = \frac{OK_1^2}{OK^2}$$

$$\frac{S_{(x)сеч}}{Q_{осн}} = \frac{x^2}{H^2}$$

3.

$$\int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{Qx^2}{H_2}dx = \frac{Qx^3}{H^2 3}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Тогда, $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Вычисление объема шара

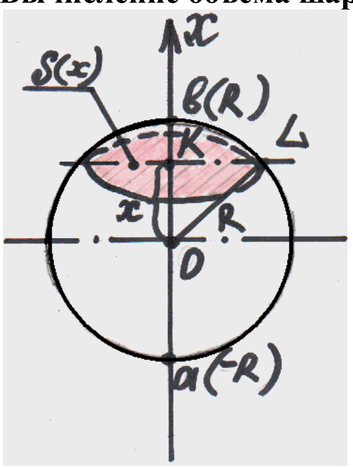


Рис. 5

Дано:

Шар
R – радиус шара
Доказать:
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$$
По алгоритму:
1. O – центр шара,
2. $a = -R$

Рассмотрим ΔOKL

$OK = x,$

$OL = R,$

$KL^2 = R^2 - x^2$

$S(x) = \pi (KL)^2 = \pi (R^2 - x^2)$

Тогда
$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x - \pi \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-R}^{R} = (\pi R^2 R^2 - \pi \frac{R^3}{3}) - (\pi R^2(-R) -$$
$$- \frac{\pi (-R)^3}{3}) = \pi (R^3 - \frac{R^3}{3}) + R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$
,
Значит,
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$$
Объем шарового сегмента

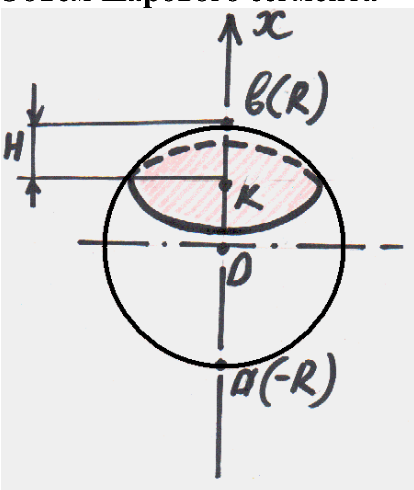


Рис. 6
Дано:
Сегмент
H - высота сегмента
R – радиус шара
Доказать:
$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H)$$
По алгоритму:
1. 0,
2. $a = R - H$,

$$V_{сегм} = \int_{R-H}^{R} S(x)dx = \int_{R-H}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x - \pi \frac{x^3}{3}\Bigg|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi\left(R^2 R - \pi R^3 - (R^2(R-H) - \frac{(R-H)^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi(3R^3 - R^3 - 3R^3 +$$

$$+ 3R^2H + R^3 - 3R^2H - H^3) = \frac{1}{3}\pi(3RH^2 - H^3) = \pi H^2(R - \frac{H}{3}) = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H).$$

Задания для практического занятия:

1. Определите, сколько граней имеет десятиугольная призма.
2. Дана треугольная пирамида МАВС. Точка Н лежит на ребре АМ, точка Р на ребре ВМ, точка Е на ребре СМ.

а) Постройте сечение, проходящее через точки Н, Р, Е.

б) Постройте точку пересечения прямой РЕ и плоскости АВС.

3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 и 4 см, а диагональ параллелепипеда – 6 см. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.
4. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна 4 см, а боковое ребро – 5 см. Найдите:

а) сторону основания пирамиды,

б) высоту пирамиды,

в) полную поверхность пирамиды.

5 . Определите, сколько граней имеет двенадцатиугольная призма.

6. Дана треугольная пирамида КАВС. Точка М лежит на ребре АК, точка Е на ребре ВК, точка Р на ребре СК.

а) Постройте сечение, проходящее через точки М, Р, Е.

б) Постройте точку пересечения прямой РЕ и плоскости АВС.

7. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см, а апофема образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите боковую поверхность пирамиды.
8. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна 26 см. Найдите:

а) высоту призмы,

б) боковую поверхность призмы,

в) полную поверхность призмы.

9.Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади боковой поверхности, если осевое сечение цилиндра: а) квадрат АВСД, б) прямоугольник АВСД, в котором АВ: АД=1:2.

10. Отношение площадей боковой и полной поверхностей конуса равно 7/8. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

11. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу 120°, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения, если радиус основания равен 4см.

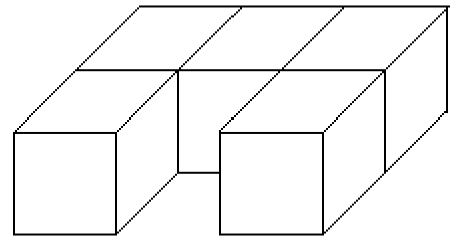
12. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны. Одно из оснований осевого сечения равно 40см, а его площадь 36^2дм. Вычислите площади полной и боковой поверхностей усеченного конуса.

13. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2. Через вершину конуса проведено сечение, образующее угол α с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

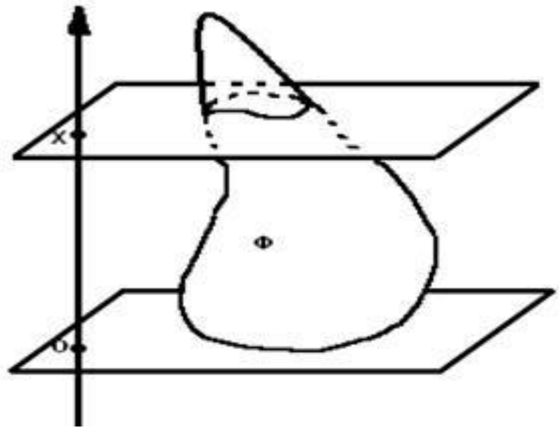
14. Прямоугольный параллелепипед ABCDA1B1C1D1, объем

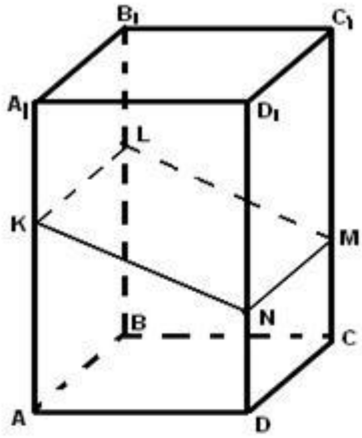
которого 18 см3, разделен сечением KLMN на два конгруэнтных тела. Найдите объем каждой части.

15. Из кубов, длины ребер которых равны 1 см, составлена фигура, изображенная на рис. 16. Вычислите ее объем.



16. Прямоугольный параллелепипед ABCDA1B1C1D1 разделен плоскостью ACC1A на две треугольные призмы, объем одной из которых равен 8 см3. Найдите объем параллелепипеда.





Практическое занятие №62, №63. Вычисление площадей поверхностей многогранников и тел вращения.

Цель:

- с основными видами многогранников и тел вращения, их изображениями, свойствами, основными формулами вычисления площадей поверхностей многогранников и тел вращения, овладеть техникой вычисления площадей поверхностей многогранников и тел вращения.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Площадь поверхности многогранника находится как сумма площадей всех его граней.

Площадь поверхности призмы равна $S_{пр.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

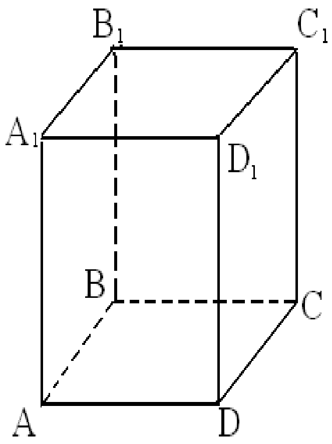
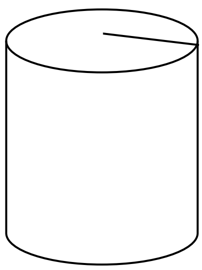


Рис.1

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

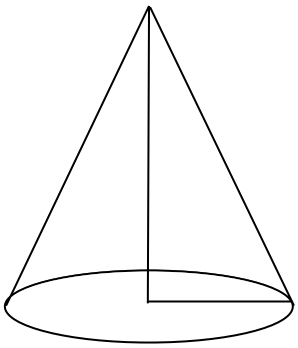
3. *Площадь поверхности цилиндра* равна $S = S_{бок.} + 2S_{осн.}$ $S_{бок.} = 2\pi rh$ $S_{осн.} = \pi r^2$

$S_{цил.} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$, где r - радиус цилиндра, h -высота цилиндра



4. *Площадь поверхности конуса* равна $S_{кон.} = S_{бок.} + S_{осн.}$ $S_{бок.} = \pi \cdot r \cdot l$ $S_{осн.} = \pi \cdot r^2$

$S_{кон.} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l)$



Два тела подобны, если одно из них может быть получено из другого путём увеличения (или уменьшения) всех его линейных размеров в одном и том же отношении. Автомобиль и его модель – подобные тела. Два тела (фигуры) зеркально подобны, если одно из них подобно зеркальному отражению другого. Например, картина и её фотонегатив зеркально подобны друг другу.
В подобных и зеркально подобных фигурах все соответственные углы (линейные и двугранные) равны.
В подобных телах многогранные и телесные углы равны; в зеркально подобных телах они зеркально равны.
Если два тетраэдра (две треугольные пирамиды) имеют соответственно пропорциональные рёбра (или соответственно подобные грани), то они подобны или зеркально подобны. Например, если грани первой пирамиды вдвое больше, чем у второй, то высоты, апофемы, радиус описанного круга первой пирамиды также вдвое больше, чем у второй. Эта теорема не имеет места для многогранников с большим числом граней. Предположим, что мы соединили все рёбра куба в его вершинах посредством шарниров; тогда мы можем изменить форму этой фигуры, не растягивая её стержни, и получить из начального куба параллелепипед.
Две правильные призмы или пирамиды с одинаковым числом граней подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам. Два круглых цилиндра или конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам.
Если два и более тел подобны, то площади всех соответствующих плоских и кривых поверхностей этих тел пропорциональны квадратам любых соответствующих отрезков.
Если два и более тел подобны, то их объёмы, а
также объёмы любых их соответствующих частей, пропорциональны кубам любых соответствующих отрезков.
П р и м е р. Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?
Решение. Поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их
объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков
(в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно,
высота h новой чашки находится из отношения:
$(h / 10)^3 = 4 / 0.5$, то есть $h^3 = 8 \cdot 10^3$, откуда $h = 20$ см;
аналогично, для диаметра d получим:
$(d / 8)^3 = 4 / 0.5$, то есть $d^3 = 8 \cdot 8^3$, откуда $d = 16$ см

Задания для практического занятия:

1. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в шестнадцать раз?
2. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в двенадцать раз?
3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в пять раза?
4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?

5. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?
6.Основанием правильной пирамиды служит равносторонний
треугольник со стороной 4 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол 45º. Найти площадь поверхности пирамиды.

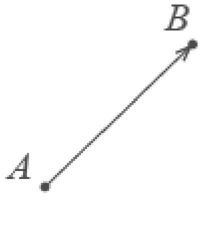
Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, сторона которой 4 см, а боковое ребро 4 см.
7.Радиус шара равен 4 см. Через конец радиуса, лежащий на сфере, проведена плоскость под углом 30º к нему. Найти площадь сечения шара.

Практическое занятие №64, №65. Координаты вектора. Длина вектора. Операции над векторами, заданными своими координатами.
Цель:

- ознакомиться с методом координат, понятием вектора и его длины, его изображением на координатной плоскости, свойствами, операции над векторами, заданными своими координатами, овладеть техникой выполнения операций над векторами, заданными своими координатами.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Стандартное определение: «Вектор — это направленный отрезок». Обычно этим и ограничиваются знания выпускника о векторах. Кому нужны какие-то «направленные отрезки»?
А в самом деле, что такое векторы и зачем они?
Прогноз погоды. «Ветер северо-западный, скорость 18 метров в секунду». Согласитесь, имеет значение и направление ветра (откуда он дует), и модуль (то есть абсолютная величина) его скорости.
Величины, не имеющие направления, называются скалярными. Масса, работа, электрический заряд никуда не направлены. Они характеризуются лишь числовым значением — «сколько килограмм» или «сколько джоулей».
Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются векторными.
Скорость, сила, ускорение — векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда». Например, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено к поверхности Земли, а величина его равна 9,8 м/с^2. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.
Вы помните, что физические величины обозначают буквами, латинскими или греческими.
Стрелочка над буквой показывает, что величина является векторной: $\vec{a}$
Вот другой пример.
Автомобиль движется из А в В. Конечный результат — его перемещение из точки А в точку В, то есть перемещение на вектор $\overrightarrow{AB}$.



Теперь понятно, почему вектор — это направленный отрезок. Обратите внимание, конец вектора — там, где стрелочка. Длиной вектора называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$

До сих пор мы работали со скалярными величинами, по правилам арифметики и элементарной алгебры. Векторы — новое понятие. Это другой класс математических объектов. Для них свои правила.

Когда-то мы и о числах ничего не знали. Знакомство с ними началось в младших классах. Оказалось, что числа можно сравнивать друг с другом, складывать, вычитать, умножать и делить. Мы узнали, что есть число единица и число ноль. Теперь мы знакомимся с векторами.

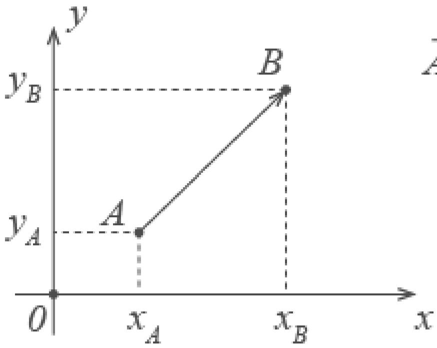
Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует — ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов.

А вот понятие равенства для векторов есть. Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости. Единичным называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината.

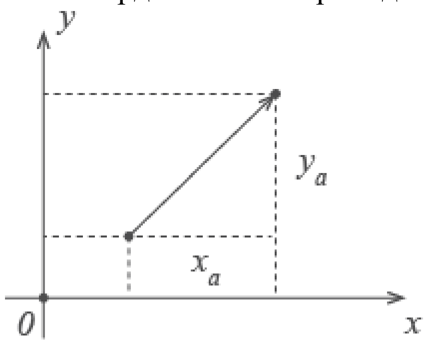
Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}\,(x_a, y_a)$

Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ — по x и по y. Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,,\ y_B - y_A)$$

Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле

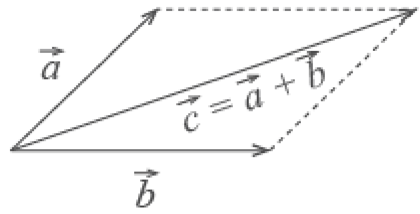


$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Сложение векторов

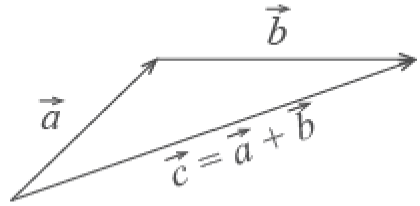
Для сложения векторов есть два способа.

1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

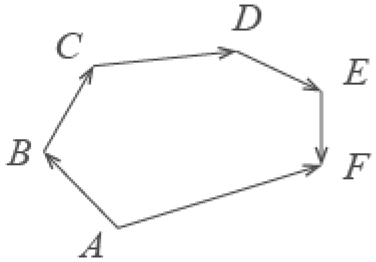


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

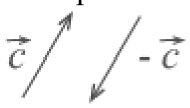
При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\,(x_a + x_b\,,\; y_a + y_b)$

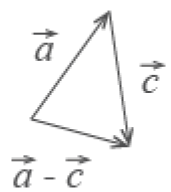
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



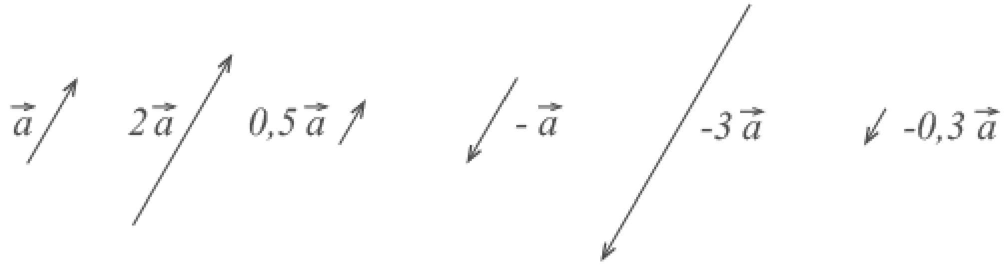
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



Векторы в пространстве.

В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Так же определяют основные понятия для векторов в пространстве: модуль вектора, направление вектора, равенство вектора. Векторы, расположенные на прямых, параллельных одной и той же плоскости, называются компланарными.

Три вектора, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, считаются компланарными.

Любой вектор dпространства можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам a, d, и c :

d= xa + y d+ zc

1. Прямоугольная система координат в пространстве.

Пусть в пространстве задана тройка попарно перпендикулярных единичных векторов i, j, к, отложенных от некоторого начало- точки О. Такую тройку векторов называют прямоугольным базисом в пространстве. Совокупность начало 0 и прямоугольного базиса (i, j, к,) называют прямоугольной системой координат в пространстве.

Разложение вектора а в базисе (i, j, к,) имеет вид

a= xi + yj +zk,

Координаты точки М - числа x, y, zв данной системе координат - называются координатами вектора ОМ = а

Если ОМ = а (x,y, z), то пишут М (x, y , z). Число x называют абциссой, y - ординатой и zаппликатой точки М или вектора ОМ = а. Начало векторов называется начало координат. Оси, определяемые вектором (i, j, k,) называются координатными осями, а плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, - координатными плоскостями. Пространство, в котором задана система координат, называют координатным пространством.

Координатные плоскости делят все на принадлежащие им точки пространства на восемь областей - октантов.

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную нулю. Точки, лежащие на оси координат, имеют две координаты равные нулю. Начало координат имеют все три координаты, равные нулю. Знаки координат в пространстве представлены в таблице:

Координаты	Октант							
	I	II	III	IY	Y	YII	YIII	YIII
Абсцисса	+	-	-	+	+	-	-	+
Ордината	+	+	-	-	+	+	-	-
Аппликата	+	+	+	+	-	-	-	-

Если вес координаты вектора а отличны от нуля, то этот вектор можно изобразить как диагональ прямоугольного параллелепипеда, числовые значения длин ребер которого равны x| |y| |z|.

В заданном прямоугольном бизнесе (i, j, к,) каждая тройка чисел . (x, y, z.) определяет единичный вектор, для которого эти числа являются координатами. По определению прямоугольного базиса имеем

i *j= i* k= j* k= O i^2 =j^2= k^2= 1

Если началом вектора а является точка А (x_a; $y_a z_a$) концом точка В ($x_в$; $y_в$ z_B), то вектор а = АВ имеет координаты, равные разностям соответствующих координтнат точек В и А

а = АВ = (x в - x_a; $y_в$-y_a; z_B-z_a),

и записывается в виде
$a = AB = (x_в . x_a)' + (y_в - У a) j +(;z_B-z_a)k$,
Длина вектора.
Длина вектора а (расстояние между двумя точками) вычисляется по формуле
$| a| =| AB| = V(x_B-x_в)^2+(y_B-y_a)^2(z_B-z_a)^2$
Длина радиус- вектор а вычисляется по формуле:
$| a | = V x^2+y^2 + z^2$
Деление отрезка в данном отношении. Если отрезок АВ разделен точкой С в отношении АС : СВ = X то координаты точки С находятся по формулам

$$x_c = \frac{x_a + \lambda x_b}{1+\lambda}$$

$$y_c = \frac{y_a + \lambda y_b}{1+\lambda}$$

$$y_c = \frac{z_a + \lambda z_b}{1+\lambda}$$

При λ= 1 получаются формулы для нахождения координат середины отрезка

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$

$$y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$

$$y_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

Скалярное произведение векторов в пространстве.
Скалярное произведение векторов а = (X1 ;y1 ; z1) и b(X2 ;y2 ; Z2) заданных своими координатами, находится по формуле
$a * b= xix_2 + yiy_2 + ziz_2$
Угол между векторами а = (X1 ;y1 ; Z1) и b(x_2 ; y2 ; z_2) вычисляется по формуле

$$\cos(ab) = \frac{a * b}{|a| * |b|} = \frac{x1x2 + y1y2 + z1z1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

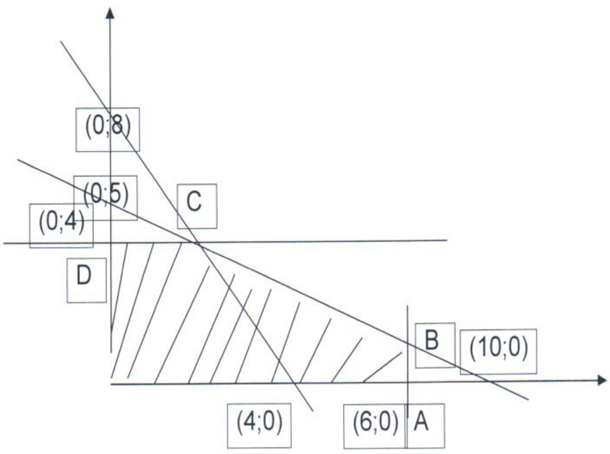
Условие перпендикулярности векторов а = (X1 ;y1 ; Z1) и b(x_2 ; y_2 ; z_2) имеет вид
$X1\ x_2 + У1\ y2+ Z1\ Z2 =0$
Требуется составить план выпуска двух видов изделий на четырёх участках цеха, чтобы получить максимальную прибыль от сдачи этих изделий. При этом накладываются следующие ограничения: время работы на 1-м участке не превышает 16 ч., на 2-м участке 30 ч., на 3-м участке 16 часов, на 4-м - 12 часов.
В таблице указано время (в часах), необходимое на изготовление каждого из этих двух видов изделий на каждом из участков. Нуль означает, что изделие на данном участке не изготовляется:

	Изделие	Участки			
		1	2	3	4
	1	4	3	0	2
	2	2	6	4	0
Возможное время работы	Время работы на участке.	16	30	16	12

Цеху начисляется прибыль: 3 руб. при реализация изделия 1 вида и руб. при реализации одного изделия 2 вида.
Обозначаем через x_1 число изделий 1 вида, а рез x_2 число изделий 2 вида.

На 1-м участке затрачивается $4x_1$ часов на изготовление изделий 1 вида и на $2x_2$ часов на изготовление изделий 2 вида т. е. всего $4x_1+2x_2$ часов. Так время работы на 1-м участке не превышает 16 ч,
то $4x_1+2x_2<=16$.
На 2-м участке затрачивается $3x_1$ ч. на изделие 1 вида и $6x_2$часов на изделия 2 вида , всего не более 30 ч, т. е. $3x_1+6x_2<=30$.
На третьем участке затрачивается 0 часов на изделия 1 вида и $4x_2$ часов на изделие 2 вида т. е. $4x_2<=16$.
На 4-м участке затрачивается $2x_1$ часов на изделия 1 вида и 0 ч. на изделие 2 т. е. $2x_1<=12$.
От реализации изделий 1 вида цеху начисляется $3x_1$ рублей прибыли и от реализации x_2 изделий 2 вида $4x_2$ рублей прибыли.
Общая прибыль цеха составляет $3x_1+4x_1$ (руб), где $x_1>=0$ и $x_2>=0$.
Математическая модель задачи описывается системой линейных неравенств.

$4x_1+2x_2<=16$
$3x_1+6x_2<=30$
$4x_2<=16$
$2x_1<=12$
$X_1>=0$
$x_2>=0$



На множестве решений этой системы неравенств требуется найти наибольшее значение линейной формы$Z=3x_1+4x_2$.
Построив прямые $4x_1+2x_2=16$, $3x_1+6x_2<=30$, $4x_2<=1\ 6$, $2x_1=12$, получим
замкнутый многоугольник OABCD, вычислим координаты его вершин:

$2x_1=12$ $\qquad$ $2x_1=12$
$x_2=0$ $\quad$ A(6;0) $\quad$ $3x_1+6x_2=30$ $\quad$ B(6;2)
$3x_1+6x_2=30$ $\qquad$ $4x_2=16$
$4x_2=16$; $\quad$ C(2;4) $\quad$ $x_1=0$ $\qquad$ D(0;4)

Построив координаты вершин в выражении линейной формы, получим:
$Z_A=3*6+4*0=18$$Z_B=3*6+4*2=26$
$Z_c=3*2+4*4=22$$Z_D=3*0+4*4=16$

В точке B(6;2) линейная форма достигает максимума :$Z_{max}=26$.
Таким образом, наибольшая прибыль от сдачи видов изделий составляет 26 руб. Она будет получена, если цех изготовит 6 изделий 1 вида 2 изделия 2 вида.

Задания для практического занятия:

1. Упростить выражение: $2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}$.

2. Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD (рис.). Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

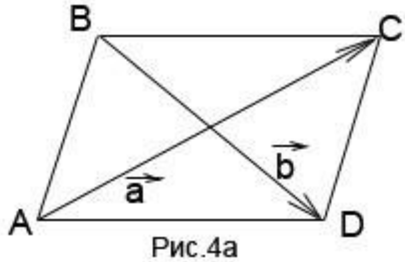


Рис.4а

3. Упростите выражение, содержащее векторы $\vec{a}-2\cdot\left(\vec{b}+\right.$

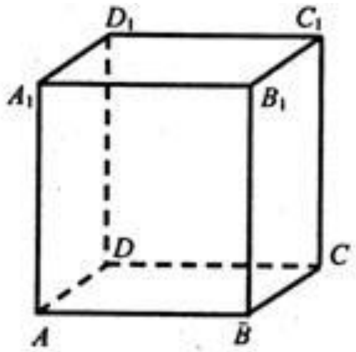
4. На рисунке изображен параллелепипед АВСДА1В1С1Д1. Назовите вектор, начало и конец которого является вершинами параллелепипед, равный сумме векторов:

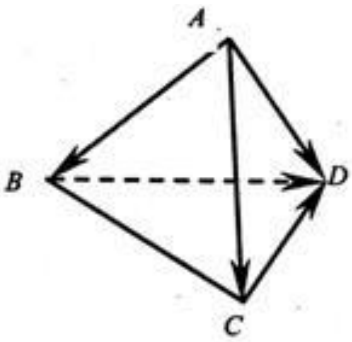
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1\text{Д}_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\text{Д}_1}=\overrightarrow{\text{Д}_1C_1}+\overrightarrow{A\text{Д}_1}=\overrightarrow{AC_1}$

в) $\overrightarrow{\text{Д}A}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B}$

г) $\overrightarrow{\text{ДД}_1}+\overrightarrow{\text{Д}B}=\overrightarrow{\text{ДД}_1}+\overrightarrow{\text{Д}_1B_1}=\overrightarrow{\text{Д}B_1}$





д) $\overrightarrow{\text{Д}B_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\text{Д}B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{\text{Д}C_1}$

5. Тетраэдр АВСД. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\text{Д}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C\text{Д}}$.

6. Дан тетраэдр АВСД. Найдите сумму:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\text{Д}}+\overrightarrow{\text{Д}C}=\overrightarrow{AC}$

б) $\overrightarrow{A\text{Д}}+\overrightarrow{\text{Д}C}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C\text{Д}}+\overrightarrow{\text{Д}A}=\vec{0}$

Вариант 1

1. Дан параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. Отложите от точки А вектор $\overline{\text{СД}}$.
2. Зная координаты векторов $\vec{a}=(2;3;-4)$; $\vec{в}=(-1;2;1)$ и $\vec{c}=(3;0;2)$, найдите координаты векторов $2\vec{a}+3\vec{в}+2\vec{c}$.
3. Дан треугольник с вершинами А(-2;-4;0); В(-2;-1;4) и С (-2;2;1). Вычислите его внутренний угол при вершине А.

Вариант 2

1. Постройте точки G (0;0;2); H(3;0;-4).
2. Вычислите длину вектора $\vec{a}=-\vec{c}-2\vec{j}+2\vec{k}$.
3. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{в}=-\vec{i}+\vec{k}$построен параллелограмм. Вычислите острый угол между его диагоналями.

Вариант 3

1. Дан параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. Отложите от точки B_1 вектор $\overline{AB}$.
2. Зная координаты векторов $\vec{a}=(2;3;-4)$ и $\vec{c}=(3;0;2)$, найдите координаты вектора $-\vec{a}+2\vec{c}$.
3. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Вариант 4

1. Дан тетраэдр АВСД. Найдите сумму векторов $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{\text{СД}}+\overline{\text{ДА}}$.
2. Зная координаты векторов $\vec{a}=(2;3;-4)$; $(1;2;1)$, найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{в}$.

3. Найдите произведение векторов $\vec{a} = (3; -2; 1)$ и $\vec{b} = (4; -7; -3)$.

Вариант 5

1. Дана призма АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C}$.
2. Постройте вектор $\overrightarrow{AB}$, если: А(0;-2;3) и В (5;0;-4).
3. Вычислите длину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = (2; 0; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

Вариант 6

1. Дан параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{Д_1A} + \overrightarrow{ВД_1} + \overrightarrow{Д^1Д}$.
2. Постройте вектор $\vec{b} = (-2; -3; -4)$.
3. Найдите периметр треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, если А(8;0;6), В(8;-4$6), С(6;-2$5).

Вариант 7

1. Дан параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ Отложите от точки С вектор $\overrightarrow{AA_1}$.
2. Зная координаты векторов $\vec{a} = (2; 3; -4)$, найдите координаты вектора $3\vec{a}$.
3. Даны векторы $\vec{a} = (2; -4; 5)$ и $\vec{b} = (4; -3; 5)$. Вычислите косинус угла между ними.

Вариант 8

1. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$. Запишите координаты и постройте.
2. Вычислите длину вектора$\vec{b} = \vec{\imath} + \overrightarrow{2\jmath} - 3\vec{k}$.
3. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \overrightarrow{3\jmath} + 4\vec{k}$. Вычислите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

Вариант 9

1. Дан параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$Найдите сумму векторов $\overrightarrow{Д_1C} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1C}$.
2. Зная координаты точек А(4;-3;2) и В(-2;4;-3), найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.
3. Вычислите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если А(5;3;1) и В(4;5;-1).

Вариант 10

1. Постройте точки Е(-2;3;4), F(2;3;-4).
2. При каких значениях n и p векторы $\vec{a} = (-3; n; 4)$ и $\vec{b} = (-2; 4; p)$. Коллинеарные?
3. Даны векторы $\vec{a} = (2; 2; -1)$ и $\vec{b} = (-3; 6; -6)$. Вычислите косинус угла между ними.

ВАРИАНТ 1

Предприятие выпускает продукцию двух типов: П1 и П2. Виды сырья, его запасы, расход сырья на условную единицу продукции каждого типа даны в таблице.

Виды сырья	Запас сырья	Норма расхода сырья на условную единицу.	
		П$_1$	п$_2$
1	9	1	3
2	8	2	1

Доход производства от реализации условной единицы продукции типа П1 равен денежной ед., а типа П2 - 2 денежным ед.

Как следует спланировать выпуск продукции, чтобы доход предприятия был небольшим?

ВАРИАНТ 2

Для кондитерского цеха требуется рассчитать оптимальный план выпуска карамели. Весь ассортимент карамели разделён на две однородные группы, условно обозначенные К1 и К2. Для производства карамели требуется сахарный песок, патока, фруктовое пюре. Запасы этих видов сырья равны соответственно 8,20 и 5 т. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших кол-вах, не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принять максимум прибыли. Уровень прибыли на единицу каждого вида выпускаемой карамели (в денежных ед. за 1 тонну): для К1-1, К2-2.

Нормы расхода сырья на единицу каждого вида карамели представлены в таблице:

Сырьё	Расход сырья на 1 т. карамели	
	К1	К2
Сахарный песок	1	1
Патока	1	4
Фруктовое пюре	1	0

Требуется: 1) Построить математическую модель задачи;
2) Найти план, максимизирующий прибыль (задачу решить графическим и симплексным методами.)

ВАРИАНТ 3

При производстве продукции П1 и П2 используется три вида сырья С1, С2, СЗ. На выпуск продукции П1 расходуется 1,1-1 ед. сырья С1, С2, СЗ, соответственно, а единицы продукции П2 - 6,2,0 ед. сырья С1, С2, СЗ соответственно. Запасы сырья вида С1-24, С2-8, СЗ-12 ед. Предприятие реализует единицу продукции П1 по цене 1 денеж. ед., П2 - 1 денеж. ед. Требуется:
1.Записать условия задачи в виде таблицы;
2. Построить математическую модель задачи;
3. Найти план выпуска продукции, при котором выручка предприятия будет максимальной (решить задачу графически и симплексным методом).

ВАРИАНТ 4

Для изготовления различных изделий А и В предприятие использует 3 вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного вида изделия А и В, а также общее кол-во сырья каждого вида приведены в таблице

Вид сырья	Нормы затрат на одно изделие /кг/		Общее кол-во сырья
	А	В	
1	12	1	120
2	6	18	180
3	4	5	100
Цена одного изделия /ден. ед./	20	16	

Требуется составить математическую модель задачи (на максимальную стоимость всей произведённой предприятием продукции) и найти оптимальный план.

Разложение вектора по направлениям.

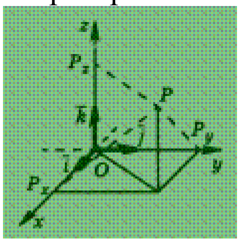
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Разложение вектора по направлениям. Проекция вектора на ось.

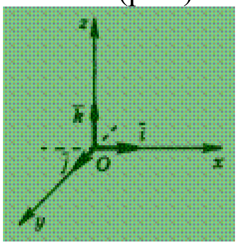
Прямоугольная (или декартова) система координат в пространстве задается тройкой попарно перпендикулярных координатных осей, имеющих общее начало в точке O и одинаковый масштаб.

Оси координат в пространстве обычно обозначают Ox, Oy, Oz (оси абсцисс, ординат и аппликат соответственно).

В пространстве возможны правые (рис.)



и левые (рис.)



системы координат; мы будем использовать правую систему координат.
Орты осей Ox, Oy, Oz — это единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ с началом в точке O; направления ортов совпадают с направлением осей.

Орты правой системы координат образуют правую тройку векторов.

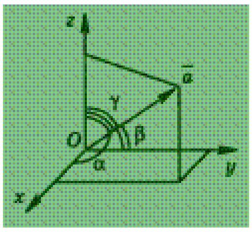
Координатные плоскости xOy, yOz, xOz делят пространство на восемь октантов.

Координаты x, y, z точки P в пространстве определяются аналогично координатам на плоскости:

это координаты (на соответствующих осях) оснований P_x, P_y, P_z перпендикуляров, опущенных из точки P на оси Ox, Oy, Oz, — соответственно абсцисса, ордината и аппликата. Координаты обычно указывают в скобках: P(x; y; z).
Между точками в пространстве и тройками их координат имеется взаимно однозначное соответствие.

Расстояние между двумя точками $P_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве определяется с помощью теоремы Пифагора: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ В частности, расстояние любой точки P(x; y; z) до начала координат равно $d_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2}$

Координатами a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат Oxyz в пространстве называются его проекции на координатные оси Ox, Oy, Oz: $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$, $a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$. Здесь α , β , γ — углы между вектором и соответствующими положительными полуосями (рис.).



Вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде
$\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ или $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число — умножаются на это число: $\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$ $\mu\vec{a} = \{\mu a_x; \mu a_y; \mu a_z\}$.

Модуль вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

В случае векторов на плоскости xOy справедливы те же формулы, но отсутствует третья координата; например, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками
$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

равны разностям соответствующих координат точек A и B: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, т. е. чтобы найти координаты некоторого вектора, достаточно из координат его конца вычесть одноименные координаты его начала.

Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть разложен по ортам $\vec{i}, \vec{j}$ прямоугольной системы координат xOy: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. Разложение по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в пространстве имеет вид $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Векторные слагаемые $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ называются составляющими (или компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям Ox, Oy, Oz.

Условие коллинеарности двух векторов.

Два ненулевых вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны, т. е. $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ (1) В равенстве (1) некоторые из знаменателей могут оказаться равными нулю.

Условимся всякую пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ понимать в смысле равенства $ad = bc$. Например, равенства
$\frac{a_x}{0} = \frac{a_y}{0} = \frac{a_z}{2}$ означают, что
$2a_x = 0 \cdot a_z$, $2a_y = 0 \cdot a_z$, $0 \cdot a_x = 0 \cdot a_y$, т. е. что $a_x = a_y = 0$.

В случае векторов на плоскости условие (1) принимает вид $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$ (2)

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Требуется найти точку M(x; y; z), лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении: $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$

Очевидно, что $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$ или
$(x - x_1)\cdot\vec{i} + (y - y_1)\cdot\vec{j} + (z - z_1)\cdot\vec{k} = \lambda\cdot(x_2 - x)\cdot\vec{i} + \lambda\cdot(y_2 - y)\cdot\vec{j} + \lambda\cdot(z_2 - z)\cdot\vec{k}$

Значит,
$x - x_1 = \lambda\cdot(x_2 - x)$,
$y - y_1 = \lambda\cdot(y_2 - y)$,
$z - z_1 = \lambda\cdot(z_2 - z)$, откуда находим $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ (3)

Если точки M_1 и M_2 принадлежат плоскости xOy, то в формулах (3) третья координата отсутствует.

Задания для практического занятия:

1) Отрезок концы которого расположены в точках А (-4,2), В(8,-4), разделён на четыре части. Найдите координаты точек деления.

2) Определите координаты вершин треугольника АВС, если середины его сторон имеют координаты К (-4, 2), L(1,6), М(-3,3). Найдите длину медианы АК.

3) Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма А(-2,2), В(2,5) и точки пересечения диагоналей К(0,6). Найдите координаты остальных вершин параллелограмма.

Практическое занятие № 66, №67. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Цель:

– ознакомиться с методом координат, понятием вектора и его длины, его изображением на координатной плоскости, свойствами, операциями над векторами, использованием координат и векторов при решении математических и прикладных задач, овладеть техникой решения математических и прикладных задач с использованием координат и векторов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы:

Векторы в пространстве.

В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Так же определяют основные понятия для векторов в пространстве: модуль вектора, направление вектора, равенство вектора.

Векторы, расположенные на прямых, параллельных одной и той же плоскости, называются компланарными.

Три вектора, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, считаются компланарными.

Любой вектор dпространства можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам a, d, и c :

d= xa + y d+ zc

Прямоугольная система координат в пространстве.

Пусть в пространстве задана тройка попарно перпендикулярных единичных векторов i, j, к, отложенных от некоторого начало- точки O. Такую тройку векторов называют прямоугольным базисом в пространстве. Совокупность начало 0 и прямоугольного базиса (i, j, к,) называют прямоугольной системой координат в пространстве.

Разложение вектора a в базисе (i, j, к,) имеет вид

a= xi + yj +zk,

Координаты точки M - числа x, y, zв данной системе координат - называются координатами вектора OM = a

Если OM = a (x,y, z), то пишут M (x, y , z). Число x называют абциссной, y - ординатой и zаппликатой точки M или вектора OM = a . Начало векторов называется начало координат. Оси, определяемые вектором (i, j, k,) называются координатными осями, а плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, - координатными плоскостями. Пространство, в котором задана система координат, называют координатным пространством.

Координатные плоскости делят все на принадлежащие им точки пространства на восемь областей - октантов.

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную нулю. Точки, лежащие на оси координат, имеют две координаты равные нулю. Начало координат имеют все три координаты, равные нулю. Знаки координат в пространстве представлены в таблице:

Координаты	Октант							
	I	II	III	IY	Y	YII	YIII	YIII
Абсцисса	+	-	-	+	+	-	-	+
Ордината	+	+	-	-	+	+	-	-
Аппликата	+	+	+	+	-	-	-	-

Если вес координаты вектора a отличны от нуля, то этот вектор можно изобразить как диагональ прямоугольного параллелепипеда, числовые значения длин ребер которого равны x| |y| |z|.

В заданном прямоугольном бизнесе (i, j, к,) каждая тройка чисел . (x, y, z.) определяет единичный вектор, для которого эти числа являются координатами. По определению прямоугольного базиса имеем

$i*j = i*k = j*k = O$ $i^2 = j^2 = k^2 = 1$
Если началом вектора а является точка А (x_a; $y_a z_a$) концом точка В ($x_в$; $y_в$ z_B), то вектор а = АВ имеет координаты, равные разностям соответствующих координтнат точек В и А
а = АВ = (х в - x_a; $y_в$-y_a; z_B-z_a),
и записывается в виде
а = АВ = (х в . x_a)' + ($y_в$ - Уа) j +(;z_B-z_a)k,
Длина вектора.
Длина вектора а (расстояние между двумя точками) вычисляется по формуле
| а| =| АВ| = V(x_B-$x_в$)^2+(y_B-y_a)^2(z_B-z_a)^2
Длина радиус- вектор а вычисляется по формуле:
| а | = V x^2+y^2 + z^2
Деление отрезка в данном отношении. Если отрезок АВ разделен точкой С в отношении АС : СВ = Х то координаты точки С находятся по формулам

$$x_c = \frac{x_a + \lambda x_b}{1+\lambda}$$
$$y_c = \frac{y_a + \lambda y_b}{1+\lambda}$$
$$y_c = \frac{z_a + \lambda z_b}{1+\lambda}$$

При λ= 1 получаются формулы для нахождения координат середины отрезка

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$
$$y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$
$$y_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

Скалярное произведение векторов в пространстве.
Скалярное произведение векторов а = (X1 ;y1 ; z1) и b(X2 ;y2 ; Z2) заданных своими координатами, находится по формуле
а * b= xix_2 + yiy_2 + ziz_2
Угол между векторами а = (X1 ;y1 ; Z1) и b(x_2 ; y2 ; z_2) вычисляется по формуле

$$\cos(ab) = \frac{a*b}{|a|*|b|} = \frac{x1x2 + y1y2 + z1z1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}*\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Условие перпендикулярности векторов а = (X1 ;y1 ; Z1) и b(x_2 ; y_2 ; z_2)
Если $\mathrm{A}_1(x_1y_1z_1), \mathrm{A}_2(x_2y_2z_2), \mathrm{A}_3(x_3y_3z_3), \mathrm{A}_4(x_4y_4z_4)$, то $\mathrm{A}_1A_2(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2(z_2-z_1)^2}$$

Скалярное произведение
A1 A_2 * A 1 A_4 = (x_2 – x1) (x $_4$- x1) + (y_2 – y1) (y_4 – y1) $^+$(z_2– z1) (z_4– Z1)
Векторное произведение

$$A_1A_2 * A_1A_3 = \begin{vmatrix} x_2-x_1 y_2-y_1 z_2-z_1 \\ x_3-x_1 y_3-y_1 z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2-y_1 z_2-z_1 \\ y_3-y_1 z_3-z_1 \end{vmatrix} *i - \begin{vmatrix} x_2-x_1 z_2-z_1 \\ x_3-x_1 z_3-z_1 \end{vmatrix}$$
$$*j + \begin{vmatrix} x_2-x_1 z_2-z_1 \\ x_3-x_1 z_3-z_1 \end{vmatrix} * k[(y_2-y_1)(z_3-z_1)(y_3-y_1)(z_2-z_1)] * i - [(x_2-x_1)(z_3-z_1)(x_3 - x_1)(z_2-z_1)] * j + [(x_2-x_1)(y_3-y_1)(x_3-x_1)(y_2-y_1)] * k$$

Смешанное произведение векторов A1A2 ,A 1A 3,A1 A4

$$\text{A1A 2 ,A 1A 3,A1 A4} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 y_2-y_1 z_2-z_1 \\ x_3-x_1 y_3-y_1 z_3-z_1 \\ x_4-x_1 y_4-y_1 z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

Угол между векторами A1 A*2, A1*A4 определяется по формуле
(A A A A)=$arccos \frac{A_1A_2*A_1A_4}{|A_1A_2|*|A_1A_4|}$
Проекция вектора A1 A2 на вектор A1 A3

$$\text{пр}\mathrm{A_1A_2} = \frac{\mathrm{A_1A_2} * \mathrm{A_1A_4}}{|\mathrm{A_1A_3}|}$$

Площадь A1 A2 A3 равна половине модуля векторного произведения.

A1 A2 A3 x, т.е. $S_{A1A2A3} = \frac{1}{2}|A_1A_2A_3|$

Объем пирамиды A1 A_2 A3 A 4 равен 1\6 модуля смешенного произведения A1 A2 * A1 A3*A1 A4 т. е. V(A1A2A3A4)

Уравнение плоскости, проходящей через три точки A1 A_2 A3 можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 y - y_1 z - z_1 \\ x_2 - x_1 y_2 - y_1 z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 y_3 - y_1 z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ где $x; y; z$- текущие координаты плоскости

Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки A1 и A_2

$$\frac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_4 - z_1}$$

Если плоскость y задана общим уравнением A + B + C + D = 0, где A.B.C, - координаты вектора N перпендикулярного плоскости y , проходящей через точку A4 параллельно плоскости y имеет следующий вид : A (x -X4) + B(y - y 4) + C (z- Z4) = O

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку A4 перпендикулярно плоскости y имеют вид:

$$\frac{x - x_4}{A} = \frac{y - y_4}{B} = \frac{z - z_4}{C}$$

Расстояние от точки A4 до плоскости y определяется формулой

$$h = \frac{|Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D|}{\sqrt{A^2 D^2 C^2}}$$

Угол φ между плоскостью y и прямой заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

Вычисляется по формуле :

$$\varphi = arcsin \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Задания для практического занятия:

ВАРИАНТ 1

а) Задачи аналитического характера.

1. Доказать , что ABCравнобедренный и прямоугольный, если A (1; 0) B(1;3) C(4; 3)
2. Найти векторное произведение векторов a = 2i+ 3j+ 5kв = i+ 2j+ k
3. Вычислить длину вектора a =(-3; 8; 1)
4. Даны вектора m(- 4; 2; 3) п (2: 0; -3). Найти координаты вектора (m + 2 n)-(2m + n)
5. Найти угол между векторами a = (3: 1; 2) в (1; 1.5; 0.5)

ВАРИАНТ 2

1. Перпендикулярны ли вектора m(1; -3; 0) n (4: 1; -2).
2. Вычислить площадь с вершинами A (1;1; 1) B (2; 3; 4) C (4:3; 2)
3. Вычислить скалярное произведение а (1; 0;3) и в (2; -1; 1)
4. Построить вектор а (- 4; 5; -3)
5. Вычислить длину вектора а (- 4; 5; - 3)

ВАРИАНТ 3

1. Найти площадь параллелограмма a = 2i+ j+ 2kв = 3i+ 2j -2k
2. Найти скалярное произведение а (4; - 7; - 3) в (3; -2; 1)
3. Найти угол между векторами a = 3i+ 4kв =5 i12 k
4. Построить вектор а (6; - 4; -1)
5. Вычислить длину вектора а + в а = (-1; 2; 1) в (- 2; 2; -1)

ВАРИАНТ 4

1. Найти площадь параллелограмма a = i+ j-kв = 2i- j +2k

2. Вычислить конус угла между ними а (2; -4; 5) в (4; - 3; 5)
3. Построить вектор а (3: -2; 1)
4. Проверить перпендикулярны ли вектора а (3; 0; -6;) в (4; 7; 2)
5. Зная координаты а(2;3-4) в (-1; 2; 1) с (3; 0,2) Найти координаты вектора 2а + 2в - 2с

Задача. Даны координаты вершин *А1* А2 А3 А4

А) Найти 1) |А А2|, б) площадь грани А1 А2 А 3; в) уравнение грани А1 А2 А 3 г) -равнение ребра А1 А4 ; д) угол между ребром А1 А2 А3 и гранью А1 А2 А3.

1. А1 (4;2; 5) $А_2$(0;7;2;), $А_3$(1;5;0) А4(1;5;0)
2. А1 (4; 4; 10) $А_2$(4;10;4;), $А_3$(2;8; 4) $А_4$(9:6:4)
3. А1 (4;6;5) $А_2$(6;9;4;), $А_3$(2; 10; 10) $А_4$ (7:5 : 9)
4. А1 (3; 5; 4) $А_2$ (8;7 ;4;), $А_3$ (5; 10; 4) $А_4$ (4:7: 8)

5) Написать уравнение сферы радиуса R с центром в точке А, если А(2; 0; -1) , R = 7.

Критерии оценки практических работ

Оценка 5 ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов.

Оценка 4 ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов.

Оценка 3 ставится, если ученик правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов.

Оценка 2 ставится, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы.

Виды ошибок

Грубые ошибки

1. Незнание определений основных понятий, законов, правил, основных положений теории, формул, общепринятых символов обозначения математических величии, единиц их измерения.
2. Неумение применять знания для решения задач; неправильно сформулированные вопросы задачи или неверные объяснения хода ее решения; незнание приемов решения задач, аналогичных ранее решенных в классе, ошибки, показывающие неправильное понимание условия задачи или неправильное истолкование решения.
4. Неумение читать и строить графики и принципиальные схемы.

Негрубые ошибки

1. Неточности формулировок, определений, понятий, законов, теорий, вызванные неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия, ошибки, вызванные несоблюдением условий проведении опыта или измерений.
2. Ошибки в условных обозначениях на принципиальных схемах, неточности чертежей, графиков, схем.
3. Пропуск или неточное написание наименований единиц математических величин.
4. Нерациональный выбор хода решения.

Недочеты

1. Нерациональные записи при вычислениях, нерациональные приемы вычислении, преобразований и решений задач.
2. Арифметические ошибки в вычислениях, если эти ошибки грубо не искажают реальность полученного результата.
3. Отдельные погрешности в формулировке вопроса или ответа.
4. Небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков. Орфографические и пунктуационные ошибки.