Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 58010004

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	12	14	14	0
	Второй проверяющий	10	10	12	12	12	14	14	0
	Итого	10	10	12	12	12	14	14	0
Сумма баллов (оценка)		84							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Александрова И.А.
[signature]	Волкова Е.С.
[signature]	Федин В.Г.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

5801 0004

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

58010004

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.

Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

58010004

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1.

Группы: $a_1a_2a_3$ $a_2a_3a_5$

$a_1a_2a_4$ $a_2a_4a_5$

$a_1a_2a_5$ $a_3a_4a_5$

$a_1a_3a_4$

$a_1a_3a_5$

$a_1a_4a_5$

$a_2a_3a_4$

$\sum_{\text{всех групп}} = 4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) = 4\times 29 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 29.$

Заменим суммы на суммы 2, т.е. если $a_1+a_2+a_3=24$, то теперь, $a_4+a_5=5$.

Получим:

19 15 14 13 12 12 11 8 7 5.

$a_2 a_5$ $a_1 a_2$ $a_4 a_5$ $a_1 a_4$

Т.к. все грузы разные, то $12=a_1+a_2=a_4+a_5$, т.е.

$29=12+12+a_3 \Rightarrow a_3=5.$

Число 5 - это сумма явно без a_3. Не теряя общн. пусть будет $a_1+a_4=5$.

$2(a_1+a_2+a_4+a_5)=24$, т.е. если $a_1+a_4=5$, то $a_2+a_5=19$

из оставшихся единственная пара чисел дающая 24 очевидно 13 и 11. ($15+11=26$; $15+8=23$; $15+7=22$
$14+11=25$; $14+8=22$; $14+7=21$; $13+11=24$; $13+8=21$; $13+7=20$, $15+14=29$; $15+13=28$;
$11+8=19$, $11+7=18$, $8+7=15$)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

1

58010004

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

т.е. в 15 есть a_3; в 14 есть a_3; в 8 есть a_3 и 6 + есть a_3. т.е. Гирьки $\boxed{10; 9; 5; 3; 2}$

$10+9=19$

$10+5=15$

$9+5=14$

$10+3=13$

$10+2=12$

$9+3=12$

$9+2=11$

$5+3=8$

$5+2=7$

$3+2=5$

+

т.е. Такой набор удовлетворяет условию и он ~~опев~~ доказанно один.

№2.

а) $x_i \cdot x_j = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$

б) $x_i \cdot x_j = (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 7-4\sqrt{3}$

с) $x_i \cdot x_j = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 7+4\sqrt{3}$.

т.к. число целое, то очевидно произведений б) должно быть столько же, сколько и произведений с)

Заметим, что $2 \cdot a) = 2$ $\quad$ б) + с) = 14, т.е. лучше взять б) и с) чем а) и а), но т.к. чисел всего 1009, то придется взять одну 1.

+

Ответ: ~~14 × 1008 + 1 = 7 × 2016 + 1 = 14113~~

возьмем $14 \cdot \dfrac{\left(\frac{2018}{2}-1\right)}{2} + 1 = 14 \cdot \dfrac{1008}{2} + 1 = 7 \cdot 1008 + 1 = 7057$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2

58910004

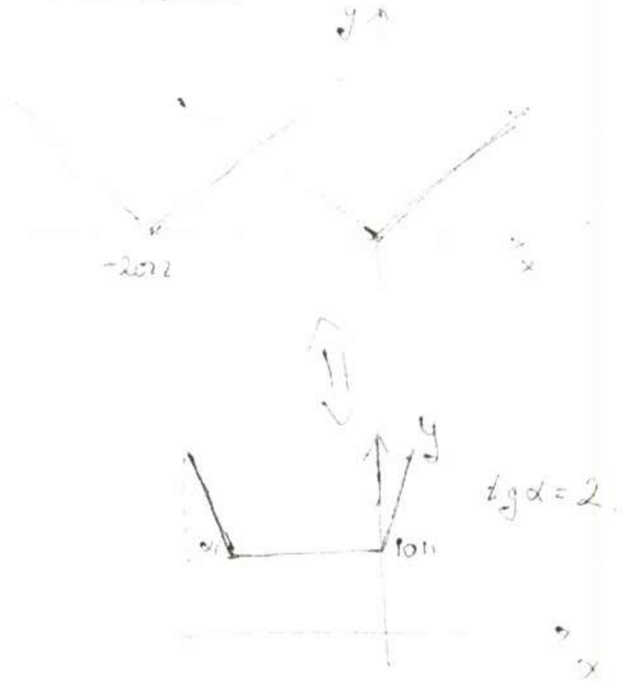
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

Черновик

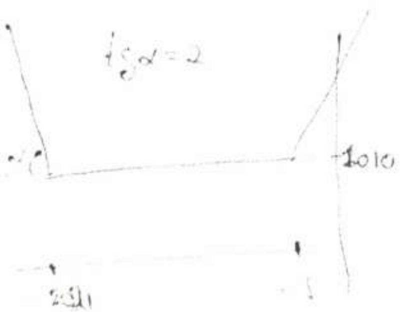
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№3

$f_1(x)=|x|+|x+2022|$

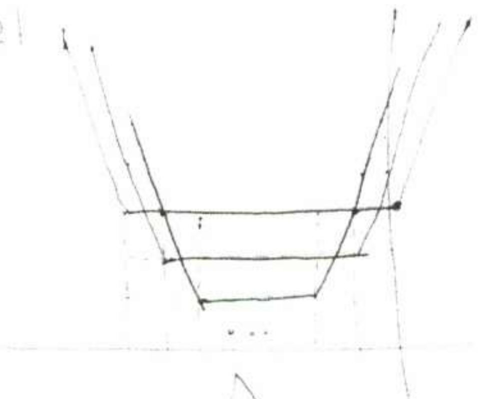


$f_2(x)=|x+1|+|x+2021|$



и т.д.

$f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2022|$



т.к. $f(x)_{min}=f(-1011)=$

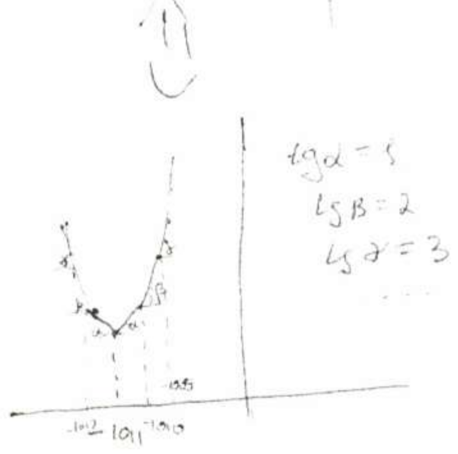
$=2\cdot1011+2\cdot1010+2\cdot1009+\ldots+0=$

$=2(1+2+\ldots+1011)=$

$=\frac{2(1012)\cdot1011}{2}=1012\cdot1011=$

$=1'023'132$

+.



Ответ: $1'023'132$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

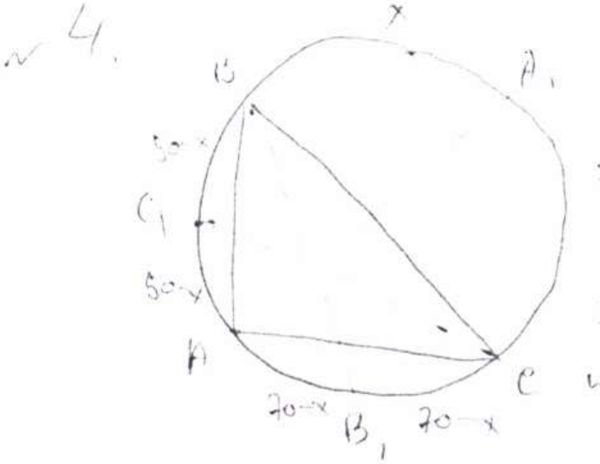
5801 0009

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№ 4.



$\frown$ – дуга. 0) Будем считать, что $\frown C_1A_1C_1 = 180°$

1) $\frown BA_1 = x = \frown A_1C$ (AA_1 – бис)

2) По усл. $\frown C_1B = 50 - x$

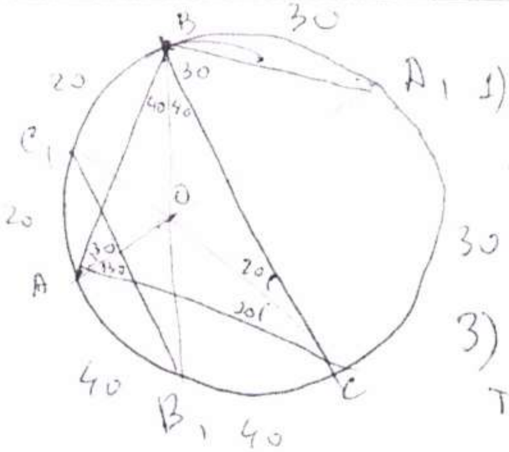
($\text{т.к.} \angle A_1CC_1 = 50° = \frown C_1B + \frown BA_1$)

3) Аналогично $\frown CB_1 = 70 - x$.

4) $\frown CB_1 = \frown B_1A$ (BB_1 – бис)

$\frown AC_1 = \frown C_1B$ (CC_1 – бис)

$\Rightarrow x + x + 70 - x + 70 - x + 50 - x + 50 - x = 180 \Rightarrow x = 30°$



A_1 1) $\angle CBA_1 = 30°$ ($\frown CA_1 = 30°$)

2) $\angle BOA_1 = \frown BA_1 + \frown AB_1 =$

$= 30° + 40° = 70°$

3) O – центр пересеч. бис.

т.е. центр вписан. окр.

4) $OA_1 = BA_1$ ($\angle OBA_1 = \angle BOA_1 = 70°$)

5) $\dfrac{B_1C_1}{\sin 60} = \dfrac{A_1B}{\sin 30} \Rightarrow A_1B = \dfrac{\sin 30}{\sin 60} \cdot B_1C_1 =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1. = A_1O.$

(+)

Ответ: $A_1O = 1$.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

4

5801 0004

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№5.

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$, обе части > 0

$abc + 2\sqrt{abc}\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} + (1-a)(1-b)(1-c) < 1$.

$ab + ac + bc - a - b - c + 2\sqrt{\ } < 0$.

$a(1-b) + c(1-a) + b(1-c) > 2\sqrt{a(1-b)c(1-a)b(1-c)}$

$a(1-b) = x$ $\quad (l \cdot m < 1$, где m и $l < 1)$
$c(1-a) = y$
$b(1-c) = z$ $\quad 1 > x, y, z > 0$.

$x + y + z > 2\sqrt{xyz}$, обе части > 0.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 4xyz > 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy(1-z) + 2yz(1-x) + 2xz(1-y) + 2xyz > 0$

каждое слагаемое $> 0 \Rightarrow$ сумма > 0, что и требовалось док-ть. +

№6.

$P_{i+1} = P_i + (2a - a) = P_i + a$, где a - сторона добавочного тр.

т.е. P_{max} при $i \to \infty$

$\lim_{i \to \infty} P_i = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4$, т.е.

max значение $P = 4$, что и требовалось док-ть. +

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5.

5801 0004

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

Гисрович

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№ 7.

1) Иван всегда может брать 1 камень. (1 - делитель всех чисел)
2) Пусть Иван берет всегда 1 камень. тогда Петру будут доставаться нечётные числа, т.е. после хода Петра будут оставаться чётные числа (Все делители нечетного числа нечетны, и неч - неч = чет.
3) Таким образом после хода Ивана всегда остаются нечетные числа, т.е Иван не может проиграть => Проигрывает Петр (раз кто-то проиграет, т.к. камней не бесконечность)

Ответ: Выиграет Иван.

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

6.

5801 0009

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$abc + (1-a)(1-b)(1-c) + 2\sqrt{abc(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

$(1-a-b+ab)(1-c)$

$1 - c - a + ac - b + bc - abc + ab + abc + 2\sqrt{} < \cancel{1}$

$ab + ac + bc - a - b - c + 2\sqrt{} < 0.$

$a(b-1) + c(a-1) + b(c-1) + 2\sqrt{} < 0.$

$a(c-1) \quad b(c-1) + c + ab$

$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ $\quad (a+b)(c-1) + c + ab.$

$x \quad 2\sqrt{x}$

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$x^2+y^2+z^2 \quad 2(xy+yz+zx) \quad 4xyz \quad x+y+z > 2\sqrt{xyz}$

$x+y+z+dx \quad 2\sqrt{x+dx(y)z}$

$x+y+z$

$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-4xyz > 0$

$(x+y)^2 + z^2 \ldots (y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \; 4xyz$

$x(x+2y-2yz) \quad 2yz(1-x)$

$x^2+y^2+z^2+2xy(1-z)+2yz(1-x)+2zx(1-y)+2xyz > 0$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0004

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

64 $\frac{1}{3}$ 5 $\frac{1}{3}$ 5

44 $\frac{1}{3}$ 5 ...

44444 $\frac{1}{3}$ 5.

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\ 256 \\ \hline 1552 \end{array}$$

$\boxed{5/с ровно 3.}$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\ 625 \\ \hline 1921 \end{array}$$

625
1250
1875.

$$\begin{array}{r} 1221 \\ +\ 256 \\ \hline 1220 \end{array}$$

512 + 625
1100+30+7

1296	1552	512	1280	256	768	1024
1921	1762	1137	1505			

1012
1011
1012

1023132

5801 0004

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$P_2 = P_1 - a + 2a = P_1 + a$

$P_{i+1} > P_i \Rightarrow \max P$ при $i \xrightarrow{\lim} \infty$

$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ 645

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ 531

2018 $P_1 \to B \cdot 1 \to P_2$

3 2 1 0 2018 = 2·1009

1009

1008

504

7 6 5

2017 1837 $\frac{+1296}{256}$ 2

$x_1^4 + x_2^4 + \ldots x_{14}^4 = 2031$ (3)

44, 14 чисел

6 4 4 12 ед.

6 4 444 много 9 ед.

4444 4^4 16·16 = 256

123456.0

mod5 | 111101.0

12345 6

1 16 81 256 625 1256 625 36·36 = 216 108 1296

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010004

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$a_1 a_2 a_3$ $a_3 a_2 a_4$
$a_1 a_2 a_4$ $a_1 a_3 5$
$a_1 a_2 a_5$ $a_1 a_4 a_5$

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$

$\cancel{1} + 14 + 15 + 16 + 17 + 17 + 18 + \cancel{2}1 + \cancel{2}2 + \cancel{2}1 =$

39

55

$89.$

$174 \mid 6$
$12 \quad 29$
54

$\Sigma = 29.$

$\underbrace{\overset{2}{a_1}\ \overset{3}{a_2}\ \overset{5}{a_3}}_{10}, \underbrace{a_4\ a_5}_{19}$

$2\ 3\ 5\ a_4,\ 19 - a_4.$
$9 \quad 10. \qquad 9 \quad 10.$

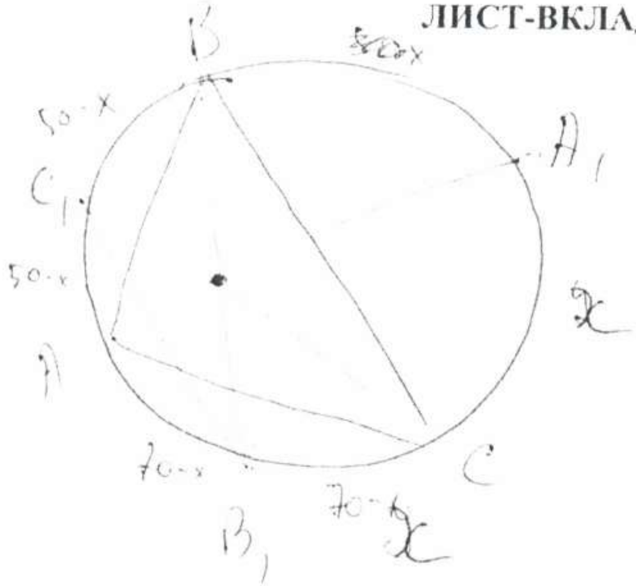
$5 + a_4 \quad 7 + a_4 \quad 8 + a_4$
$24 - a_4 \quad 26 - a_4 \quad 27 - a_4$

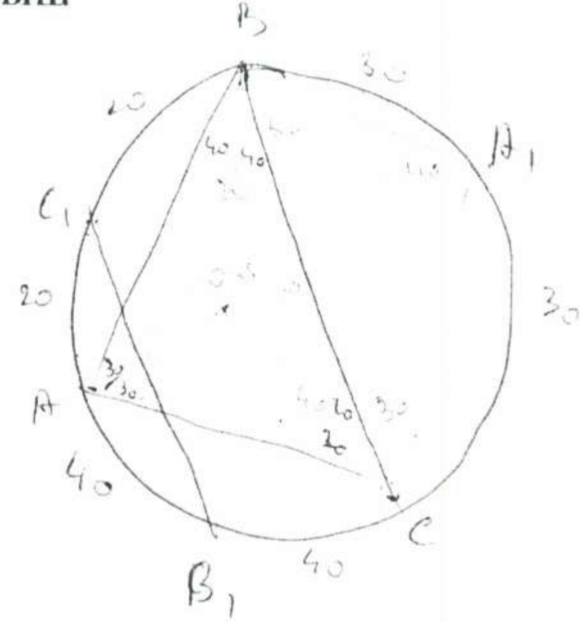
Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

Черновик

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ





$2x+100-2x+140-2x=180$

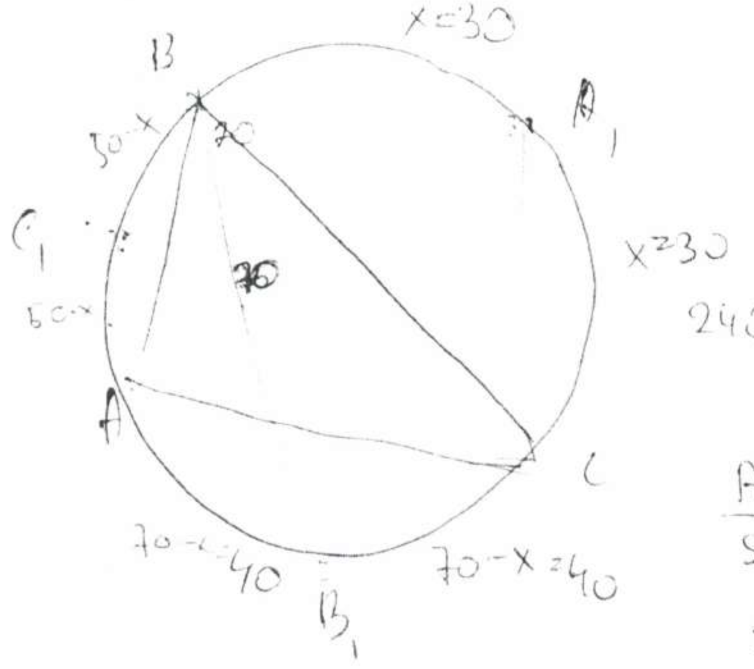
$240-2x=180$

$x=30$

$\frac{C_1B_1}{\sin 60} = \frac{BC}{\sin 60} = 2R$

$BC = B_1C_1$

$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$ $R=1$



$240-2x=180$

$x=30$

$\frac{A_1B}{\sin 30} = 2R$

$2A_1B = 2R$

$A_1B = 1$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0004

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$

$(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 7-4\sqrt{3}$

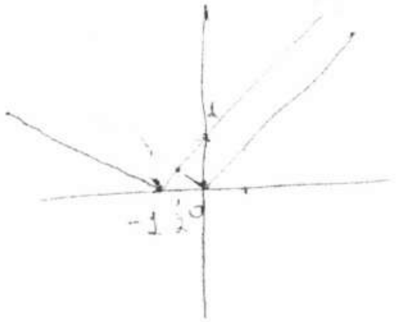
$(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 7+4\sqrt{3}.$

$14 \times$ [illegible] $= 1090 + 4\times 109 = 1090 + 436 =$

$= \underline{1526}$

$f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$

$x = -2011.$



$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

$(a_1^2 + a_2^2)^2 \geq (a_1^2 + a_2^2)^2$

$(x_1 + x_3 + \ldots + x_{2017})^2$

$a - b\sqrt{3}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010004

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

21 19 15 14 13 12 12 11 8 7 5

a_2 a_5 | a_1 a_2 | a_4 a_5 | a_2 a_4 | a_1 a_4

$\Rightarrow a_3 = 5$.

$a_2 + a_5 = 19$.

~~$a_1 a_2$~~ $a_2 a_3$ $a_3 a_4$ $a_4 a_5$

$a_1 a_3$ $a_2 a_4$ $a_3 a_5$

~~$a_1 a_4$~~ $a_2 a_5$

$a_1 a_5$

$a_1 + a_5 = 7$.

$a_5 = 7 - a_1$, $a_1 a_4 < 17$.

$a_2 + a_5 = a_2 + 7 - a_1 = 19$.

$a_2 - a_1 = 12$

$a_1 + a_2 = 12$.

$a_1 a_2 a_4 a_5 = 22$

19 15 14 13 12 12 11 8 7 5

a_2 a_5. | 10 | 9 | a_1 a_2 | a_4 a_5 | 3 | 2 | a_1 a_4.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 58010005

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	6	12	12	14	0	0
	Второй проверяющий	10	10	6	12	12	14	0	0
	Итого	10	10	6	12	12	14	0	0
Сумма баллов (оценка)		64							

Члены жюри:

[signature]	Александрова И. А.
Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Волкова Е. С.
Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Федин В. Г.
Подпись	Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима.
Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

58 01 0005

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

58 01 0005

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5

Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

5801 0005

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№2.

Рассмотрим все возможные произведения $x_i \cdot x_{i+1}$

1) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$
2) $(2+\sqrt{3})^2 = 7+2\sqrt{3}$
3) $(2-\sqrt{3})^2 = 7-2\sqrt{3}$

понятно что $(2)+(3) > 2(1)$ =>

=> рассмотрим парную сумму и все возможные варианты:

1) $1+7+2\sqrt{3} = 8+2\sqrt{3} = 11{,}5$
2) $1+7-2\sqrt{3} = 8-2\sqrt{3} = 4{,}5$ => 3 больше всех => всегда используем (3) $x_i \cdot x_{i+1} + x_{i+2} \cdot x_{i+3}$
3) $7+2\sqrt{3}+7-2\sqrt{3} = 14$

$\Sigma_{max} = 14$, но у нас слагаемых нечетное количество => => останется $x_{2017} \cdot x_{2018} = 1$, т.к. остальные будут иррациональными

$\Sigma_{min} = 504 \cdot 14 + 1 = 7057$

Ответ: 7057

+

№1.

Пусть $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$

Понятно, что $min = a_3+a_4+a_5 = 10$ (1), а $max = a_1+a_2+a_3 = 34$ (2)

Также найдем 2 по min и max; max(2): это либо $a_1+a_2+a_4$ (a) или $a_2+a_3+a_4$ (б)

Понятно, что $a_1+a_2+a_4 > a_2+a_3+a_4 \Leftrightarrow a_1 > a_3$ (по усл.) => $a_1+a_2+a_4 = 22$ (3)

min(2): $a_5+a_3+a_2$ или $a_4+a_3+a_2$ или $a_5+a_4+a_2$, понятно что $a_5+a_4+a_2 < a_4+a_3+a_2$, $< a_5+a_3+a_2$ $\Leftrightarrow a_5 < a_3$ (по усл.) => $a_5+a_2+a_4 = 14$ (4)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 1.

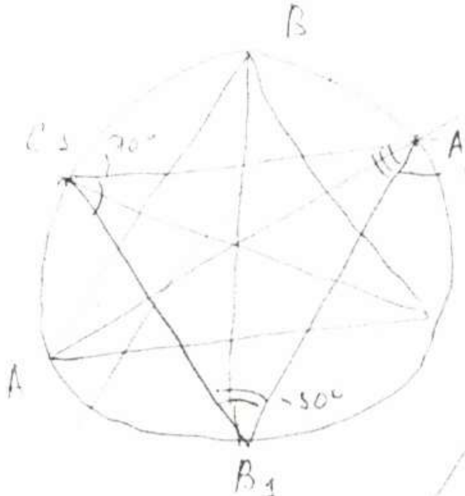
5801 0005

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

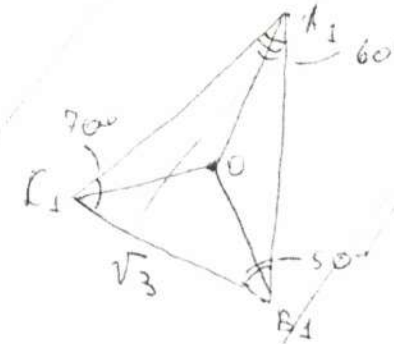
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№4



Пусть точка ∩ биссектрис = O

Рассмотрим △ $A_1B_1C_1$



Теорема синусов

$$\frac{A_1B_1}{\sin 70} = \frac{A_1C_1}{\sin 50} = \frac{B_1C_1}{\sin 60} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_1B_1 = 2\sin 70 = 1,88$

$A_1C_1 = 2\sin 50 = 1,53$ $\angle C_1B_1A_1$

№6.

Периметр первого $= 3(P_0)$, затем к нему достраивается со стороной $\frac{1}{2} \Rightarrow P_0 - \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = P_0 + \frac{1}{2}$, затем $\frac{1}{4} \Rightarrow P_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = P_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ периметр последнего $= P_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$

Рассмотрим $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ – это бесконечно убыв геометр прогрессия $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow P(\text{посл.}) = 3+1 = 4$ – это max P и он ≤ 4

что и требовалось док-ть.

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0005

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№5

Запишем неравенство КБШ (Коши-Буняковского-Шварца)

$(a_1^2+a_2^2+\dots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\dots c_n^2) \geq (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\dots+a_nb_nc_n)^2$

Применим для данного неравенства:

$a_1=\sqrt{1-a}>0;\ b_1=\sqrt{1-b}>0,\ c_1=\sqrt{1-c}>0$

$a_2=\sqrt{a}>0\ b_2=\sqrt{b}>0\ b_3=\sqrt{c}>0$

(+)

$(1-a+a)(1-b+b)(1-c+c)=1 \geq (\sqrt{1-a}\sqrt{1-b}\sqrt{1-c}+\sqrt{abc})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}+\sqrt{abc})^2 \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}+\sqrt{abc} \leq 1$, но равенство 1 быть не может т.к. для этого нужно чтобы $a=b=c=0$, но у нас $a, b, c>0 \Rightarrow$ что и т.д.

№1

Пусть $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5 \Rightarrow \max = a_1+a_2+a_3=24$ (1), $\min = a_3+a_4+a_5=10$ (2) Найдем $\max(2)$ и $\min(2)$

$\max(2)=a_1+a_2+a_4 \vee a_2+a_3+a_4$, $a_1+a_2+a_4>a_2+a_3+a_4 \Leftrightarrow a_1>a_3$ (по усл)

$a_1+a_2+a_4=22$ (3), $\min(2)=a_5+a_4+a_2 \vee a_4+a_3+a_2$;

$a_5+a_4+a_2<a_4+a_3+a_2 \Leftrightarrow a_5<a_3$ (по усл.) $\Rightarrow a_5+a_4+a_2=14$ (4)

(1) − (3): $a_3-a_4=2$, (4) − (2): $a_2-a_3=4$

Также можем найти среднее: $a_2+a_3+a_4=17 \Rightarrow$ подставим $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_3-2+4+a_3+a_3=17 \Rightarrow \underline{a_3=5} \Rightarrow a_4=3 \Rightarrow a_2=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=10,\ a_5=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10>9>5>3>2$ - выполняется (+)

Ответ: 10, 9, 5, 3, 2.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 3

58010005

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№3

Понятно, что модули имеют крит. точки и когда в внутри модуля отр. число берётся $-x+\dots \Rightarrow$ чтобы все x ушли и выражения было min возьмём $x \in [-1011; 1012]$ ← не доказано! , получим

$-x - x - 1 - x \dots - x - 1011 + x + 1012 + x + 1013 + \dots x + 2022 =$

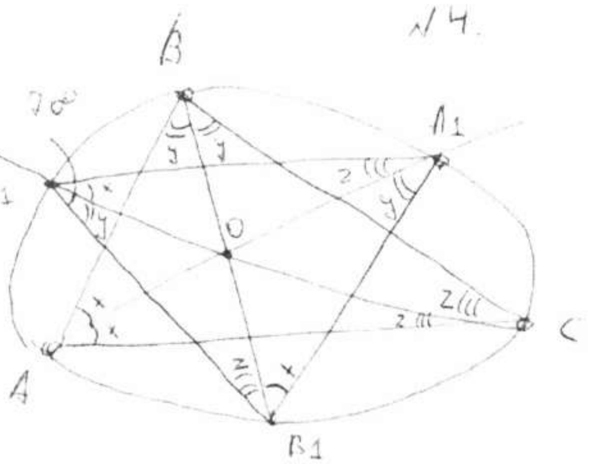
$= -1012x - (1+2+\dots 1011) + x + 1012 + 1012x + (1013 + \dots + 2022) =$ $\frac{+}{2}$

$= x + 1012 - (1+2+\dots 1011) + (1013 + \dots + 2022) \Rightarrow$ чтобы выражение было min $x = -1012 \Rightarrow = (1013 + \dots + 2022) - (1+2+\dots 1011) =$

$= 1012 \cdot 1010 - 1011 = 1021109$

Ответ 1021109

№4.



$\angle A_1C_1O = \angle A_1AC = x$ (на одну дугу)

$\angle B_1C_1O = \angle B_1BC = y$

$\angle C_1A_1O = \angle C_1CA = z$

$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = y$ на одну дугу

$\angle A_1B_1O = \angle A_1AB = x$

$\angle BB_1C_1 = \angle C_1CB = z \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ z + x = 50 \\ z + y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 40° \\ z = 20° \\ x = 30° \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \angle C_1OA_1 = 130° \\ \angle C_1OB_1 = 120° \\ \angle B_1OA = 110° \end{matrix}$

Теорема синусов для $\triangle A_1C_1B_1$:

$\frac{A_1B_1}{\sin 70} = \frac{C_1B_1}{\sin 60} = 2 \Rightarrow A_1B_1 = 2\sin 70$ ~~\dots~~

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 4

5801 0005

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Теорема синусов для $\triangle A_1OB_1$

$$\frac{A_1B_1}{\sin 110^\circ} = \frac{A_1O}{\sin 30^\circ} \Rightarrow A_1O = \frac{\sin 30}{\sin 110^\circ} \cdot A_1B_1 = \frac{0{,}5}{0{,}94} \cdot 1{,}88 \approx 1$$

~~Ответ $A_1O = 1$~~

$$= \frac{\sin 30}{\sin 110} \cdot 2 \sin 70^\circ = \text{(синусы смежных равны)}$$

$$\sin 30 \cdot 2 \cdot \frac{\sin 110}{\sin 110} = 0{,}5 \cdot 2 = 1$$

+

Ответ: $A_1O = 1$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

лист 5

580/0005

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$

10 9 5 3 2

$a_1 + a_2 + a_3 = 24$

$a_3 + a_1 + a_4 = 10$

$a_5 \; a_4 \; a_2$

$a_1 = 3a_2$

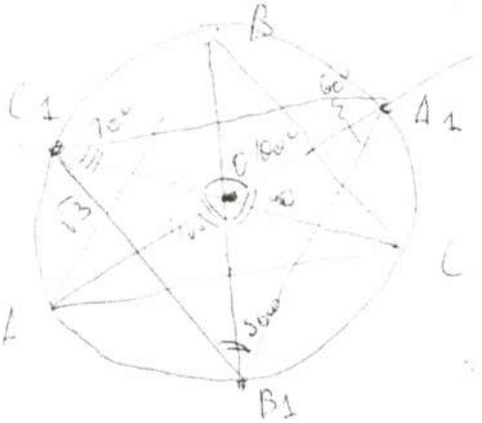
$|x|$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 24 \\ a_4 + a_3 + a_4 = 10 \\ a_5 + a_4 + a_2 = 14 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 22 \end{cases}$$

$a_3 - a_4 = 2$

$a_2 - a_3 = 4$

$OA_1 - ?$



$a_1 + a_2 + a_3 = 24$

$a_3 + a_4 + a_5 = 10$

$a_2 + a_2 + a_4 = 17$

$a_3 - 2 + a_3 + 4 + a_3 = 17$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) =$

$= 4 - 3 = 1$

$(2-\sqrt{3})^2 =$

$= 4 - 2\sqrt{3} + 3 = 7 - 2\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{3}$

$0 < a \quad b, c < 1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

$\sqrt{abc} = \frac{a+b+c}{2}$

$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \le \frac{1-a+1-b+1-c}{2} = 1{,}5 - \frac{a+b+c}{2}$

7-1

13 12 11 10 8 9 6 10 8 5 3 2 1

2017

$abc + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$

$(1-a-b+ab)(1-c)$

$1-a-b+ab-c+ac+cb-abc \quad < 1$

2018

$1-a-b+ab-c+ac+cb+2$

2017

0, 1

13 12 1 2 4 3 6

$-x-x+1$

8 $= 2025 = 25^2$

45^2

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 1

5801000

Черновик Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Понятно, что 3 по тих будет $a_2+a_3+a_4=21$ (5)

Запишем систему:

$$\begin{cases} a_3+a_4+a_5=10 \ (1) \\ a_1+a_2+a_3=24 \ (2) \\ a_1+a_2+a_4=22 \ (3) \\ a_5+a_2+a_4=14 \ (4) \\ a_2+a_3+a_4=21 \ (5) \end{cases}$$

$(2)-(4) \Rightarrow a_1-a_5=10$

$3-\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$

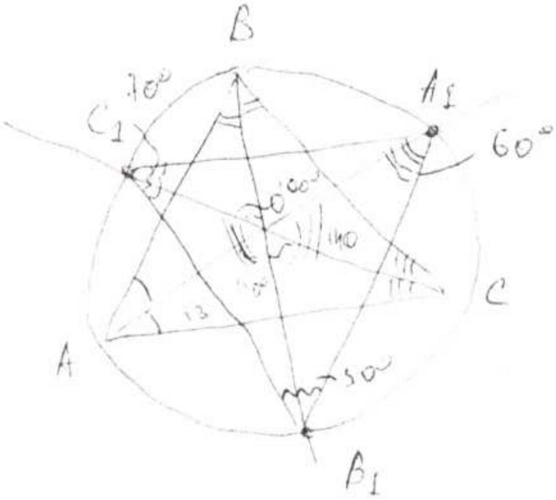
$3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$

$\sqrt{abc}$

$\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{b_1}{4}$

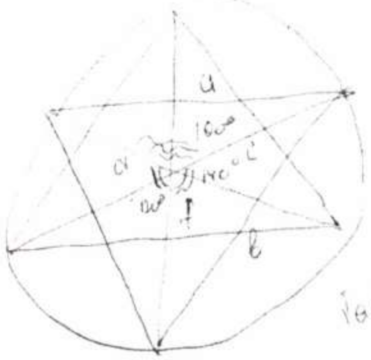
$\frac{a+b}{2}+c$

$\frac{b_1}{19}$ $\quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

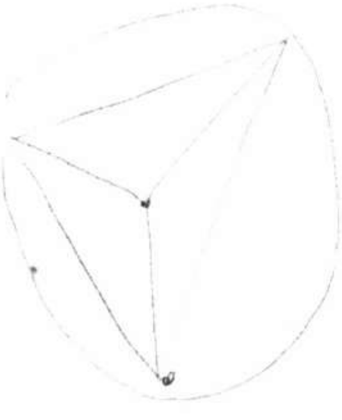


%

(1)



$\sqrt{abc} <$



$(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2+$

$a \cdot b$

$a<1$

2031

$abc<1$

$a<1$

$-a>-1$

$1-a>0$

$(a_1^2+a_2^2+\ldots)(b_1^2+b_2^2+\ldots) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots)^2$

$(1-a)(1-b)(1-c)$

$=1 \cdot (1-a+a)(1-b+b)(1-c+c) \leq (\sqrt{(1-b)(1-c)(1-a)}+\sqrt{abc})^2$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 2

58010005

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

1009

$(1-1011)+(1012+2022)$ $\quad x_1 x_2 \quad$ 1008 $\quad$ 1296

$\frac{1012+2022}{2\ 2}\cdot 505$ $\quad (x_1^2-x_2^2)^2+2x_1^2x_2^2+$ $\quad$ 2017

1009 $\quad 2031$ $\quad$ 2016

1008 $\quad$ 625 $\quad$ 1532170 $\quad (x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2+ \quad =$ $\quad$ 2009

625

625 $\quad$ 504

1010

$=2031-2(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2+\ldots)$

511566 $\quad$ 81 $\quad$ 1532675

816 $\quad (x_1x_2+x_3x_4)^2-$

16

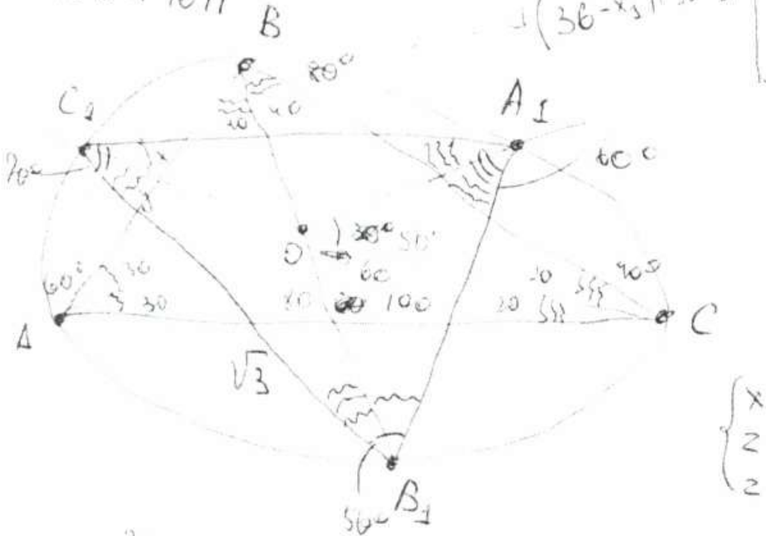
1517,5 $\quad$ 16 $\quad$ 1021615 $\quad$ 1296

1012 $\quad$ 1011 $\quad$ 1021109

1012 · 1010 + 1011 $\quad (36-x_1)(36+x_1)$

x^4	
1	1
16	1
81	16+1
256	$24\cdot 81\cdot 3\cdot 4$ 2016
625	
1296	6 $\quad$ 2013

2012



1 2 $\quad$ 81 $\quad$ 4

$\begin{cases} x+y=70 \\ z+x=50 \\ z+y=60 \end{cases}$ $\quad y-z=20$

$y=40°$

$z=20°$

$x=30°$

1) 1296 $\quad$ 1) 1296 $\quad$ ... 1 6 5

2031 $\quad$ 256

1296 $\quad$ 256 $\quad$ 1009

256 $\quad$ 81

1 $\quad$ 81 $\quad$ Иван $\quad$ 6 + 5

1

2 $\quad$ 16 $\quad$ 1008

16 $\quad$ 2017 $\quad$ 512

3 $\quad$ 16 $\quad$ 2016

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 3

58010003

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$(x_1^2+x_2^2)^2$

$((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2 + -2x_1^2x_2^2$

$x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-(\sqrt{2}x_1x_2)^2$

$x_1+x_2)^2-2x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_2)((x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\sqrt{2}x_1x_2)$

x_1+

$x_2^4+x_3^4+ \quad +x_{14}^4 = a_1^4+a_2^4+ \quad a_{14}^4$

$(a_1^2-x_1^2)$

$x_2^2\ a_2^2)$

$(a_1^2-x_1^2)(a_1^2+x_1^2)$

$x_2^2+a_2^2)$

2016^2-2015^2

340^2-337^2

$2031=6+2025=6+45^2$

46^2-85

$2031=3\cdot677=1\cdot2031$

$a-b=3 \quad a-b=1$

$a+b=677 \quad a+b=2031$

$a=340 \quad a=2016$

$b=337 \quad b=2015$

$2031=3\cdot677\cdot 9$

$a^2-b^2=3 \rightarrow a^2=3+b^2$

$a^2+b^2=677$

$a-b$

$a+b$

$2b^2=675$

337^2 $=0$

9

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Лист 4

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 713122

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	5	2	2	9	14	14	0
	Второй проверяющий	10	5	2	2	9	14	14	0
	Итого	10	5	2	2	9	14	14	0
Сумма баллов (оценка)		56							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Фомин В.Г.
[signature]	Александрова И.Х.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

713122

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 11, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 20, 22, 23. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2030 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2030}$, каждое из которых равно либо $\sqrt{2}-1$ либо $\sqrt{2}+1$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2029}x_{2030}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$.

Задача 4. (12 баллов)

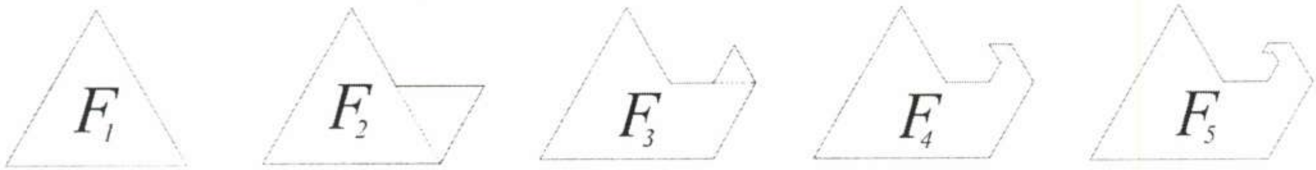
Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 55^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 65^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{6}$.

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4\ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{3}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в три раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 3,5.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2020 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2047$.

Чистовик 7|3|22

№ 2.

Чтобы число получилось целым надо рассмотреть варианты расстановки $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$.

Пусть $\sqrt{2}-1=x$ и $\sqrt{2}+1=y$

1) Если число состоит из суммы квадратов x или y получится число (в случае y: $(\sqrt{2}+1)^2\cdot 2030 = 3\cdot 2030 + 2\cdot 2030\sqrt{2}$.) (в случае x: $(\sqrt{2}-1)^2\cdot 2030 = 3\cdot 2030 - 2\cdot 2030\sqrt{2}$) Заметим что получается нецелое число.

2) Если число состоит из суммы произведений x·y: $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\cdot 2030 = (2-1)\cdot 2030 = 2030$ - целое число

3) Если число состоит из чередующейся суммы квадратов x и y:

$$((\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2)\cdot\frac{2030}{2} = (3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2})\cdot\frac{2030}{2} = 6\cdot\frac{2030}{2} = 6090$$

Т.к. 6090 > 2030, то ответ: 6090

! $\frac{2030}{4}$ $\frac{+}{2}$

Ответ: 6090.

№ 3.

Чтобы найти наименьшее значение функции, надо найти вершину этой функции. Т.к. мы знаем, что модуль раскрывается либо с − либо с +. Т.к. коэффициенты перед модулями равны и равны 1, то чтобы найти вершину, надо взять такой x, при котором половина модулей раскрывается с +, а другая с −: $x=-\frac{2018}{2}=-1009$. Чтобы найти значение функции раскроем модули:

$f(1009) = \frac{2018+1000}{2}(1010) - \frac{0+1008}{2}(1009) =$

$= 1528635 - 508536 = 1020099$

Ответ: 1020099

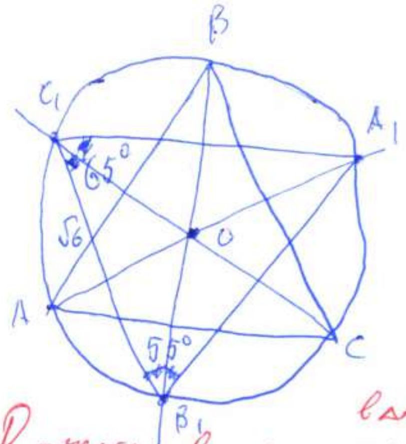
+

№4.

Д.н.: т. О Решение:

По св-ву треугольника:

$\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - 65^\circ - 55^\circ = 60^\circ$



По расширенной т. синусов:

$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

$2R = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3\cdot3\cdot2}}{3} = 2\sqrt{2}$

О - центр вписанной в △АКС не описанной около нее окр-ти

$R = \sqrt{2}$ (радиус описанной около △$A_1B_1C_1$ окружности).

Т.к. т. О - пересечение биссектрис, то она центр вписанной в △ABC окружности. => Нам надо найти A_1O.

Т.к. окружность также описана вокруг $A_1B_1C_1$, то $A_1O = R = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

(Ŧ)

№5.

$\sqrt{a\cdot b\cdot c} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$, $0<a,b,c<1$

Пусть $a = \sin^2\alpha$ $b = \sin^2\beta$ $c = \sin^2 c$, где $\alpha,\beta,c \in (0; 2\pi)\setminus\{\pi\}$.

$\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2 c} + \sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2 c)} < 1$

(±)

$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin c + \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos c < 1$

Известно, что $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin c \le \sin\alpha\cdot\sin\beta$ и $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos c \le \cos\alpha\cdot\cos\beta$

Тогда: $\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta < 1$ $\cos(\alpha-\beta) < 1$ (правильно, из условия углов).

Т.к. $\cos(\alpha-\beta) < 1$ => $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin c + \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos c < 1$ =>

=> $\sqrt{a\cdot b\cdot c} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ (при $0<a,b,c<1$), ч.т.д.

№6.

1) В $1^{ой}$ фигуре $P = 1 \cdot 3 = 3$

2) Во $2^{ой}$: $P = 3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

3) В $3^{ей}$: $P = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

Заметим, что P - прогрессия, у которой с каждым шагом изменяется шаг в $\frac{1}{3}$ раз. Заметим, что этот шаг - бесконечно убывающая прогрессия. Посчитаем сумму шагов прогрессии

S стремится к числу (не превышает) $\frac{b_1}{1-q}$, где b_1 - первый член прогрессии, а q - шаг

~~S =>~~ S нашей прогрессии стремится к $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 0,5$

Прибавим ~~изначальную~~ начальный $P = 3$: P_n стремится к (не превышает) $3 + 0,5 = 3,5$.

Следовательно периметр многоугольника стремится к 3,5, т.т.д. +

№7.

Выигрышную стратегию имеет $1^{ый}$ игрок, потому что куча состоит из чётного числа камней; 1 является делителем любого числа.

Стратегия заключается в том, что $1^{ый}$ игрок в любой ситуации сможет доводить число камней в куче до нечётного, т.к. при первом ходе, взяв 1 камень, второму придётся взять нечётное кол-во камней (т.к. делители нечётных чисел - нечётные), к $1^{ому}$ игроку придёт чётное кол-во камней и он снова доведёт кол-во до нечётного значения. Игра будет длиться, пока $1^{ый}$ не оставит 1 камень $2^{ому}$

Ответ: Иван имеет выигрышную стратегию. +

№1.

Пусть гири: $x < y < z < m < n$

Если сложить все веса, то каждая гиря взвешивалась бы по 6 раз:

$6x + 6y + 6z + 6m + 6n = 11 + 14 + 15 + 16 + 17 + 17 + 19 + 20 + 22 + 23 = 174$

$x + y + z + m + n = 29 \Rightarrow 29 - 23 = 6 = x + y$; $29 - 11 = 18 = m + n$;

$29 - 17 = 12 = x + n$. Заметим, что 14 может соответствовать только сумма $x + y + m = 14$, но $x + y = 6 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow n = 18 - 8 = 10$;

$x = 12 - 10 = 2$; $y = 6 - 2 = 4$; $z = 29 - 10 - 8 - 4 - 2 = 5$.

+

Ответ: 2; 4; 5; 8; 10.

№8.

Рассмотрим 4ые степени целых чисел:

$0^4=0$; $(\pm1)^4=1$; $(\pm2)^4=16$; $(\pm3)^4=81$; $(\pm4)^4=256$; $(\pm5)^4=625$

$(\pm6)^4=1296$

Сумма состоит из 14 членов.

Заметим, что 2047 оканчивается на 7.

Просмотрим последние цифры 4х степеней: 0; 1; 6; 1; 6; 5; 6.

$$\begin{cases} x\cdot 6+y\cdot 5+z\cdot 1+m\cdot 0=10t+7, \text{ где } t\in N\cup 0;\ x,y,z,m\geq 0 \text{ и } \in Z \\ x+y+z+m=14 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=2047 \end{cases}$$

Черновик № 1 7|3|22

11 14 15 16 17 17 19 20 22 23

x y x y z

$17+17=34$

$16+19=35$

$15+20=35$

$22+14=36$

$11+23=34$

x y $x+y$ $y+z$ $x+z$

$x+y+z+m$

$x+y$ ~~y+x~~ ~~z~~+m

$x+z$ $y+z$

$x+m$ $y+m$

$34\cdot2+35\cdot2+36 = 70+68+36 = 106+68 = 174$

$174 : 4$, -16, 14

$x+y+z+m+n =$

$174 : 6 = 29$, -12, 54

$x+y+z+m+n$

$4+3+2+1$

xyz

xym

xyn

xzm

xzn

xmn

$6+5$

~~y~~zm

yzn

ymn

zmn

$xym=14$

$m=8$

29 - сумма

$10+14=24$

x y z m n

$x+y=6$

$m+n=18$

$x+n=12$

20

$y-n$

$n-y=6$

$n=y+6$

$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=2047$

$m=8$ $n=10$

$x=2$ $y=4$ $z=5$

0; 1; 16; 81; 256; 625; 1296

427

$$\begin{array}{r} 2047 \\ -\ 427 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 2 \\ \hline 1250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1009 \\ \times\ 504 \\ \hline 4036 \\ 50450 \\ \hline 508536 \\ -\ 1620 \end{array}$$

5 · 2
6 · 6
1 · 1 + 0

6 1

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 2 \\ \hline 1250 \end{array}$$

$\times$ 256

$\times$ 16 / 6

$\times$ 16 / 14

204 | 21 / 51

6 5 1

$6 \cdot x + 5 \cdot y + 1 \cdot z = 10t + 7$

$10t + 1$

51

$$\begin{array}{r} 1021612 \\ -\ 494 \\ \hline 1021118 \end{array}$$

$51 \cdot 4 \cdot 10 + 7$

+ 16 × 6

$$\begin{array}{r} 1528635 \\ -\ 508536 \\ \hline 1020099 \\ +\ 1009 \\ \hline 1021108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 2 \\ \hline 1250 \end{array}$$

1 · 7

(6 + 1) 10 + 7

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 36 \\ \hline 216 \\ +\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2018 \\ +\ 1009 \\ \hline 3027 \\ +\ 12505 \\ \hline 15135 \\ +\ 0 \\ \hline 15135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1528635 \\ -\ 508536 \\ \hline 1020099 \\ +\ 1009 \\ \hline 1021108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1009 \\ \times\ 504 \\ \hline 4036 \\ +\ 5045 \\ \hline 54486 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4036 \\ +\ 5045 \\ \hline 508536 \end{array}$$

$$|x| + |x+1| + |x+2|$$

$$-x + x+1 + x+2$$

Черновик № 2

+13 122

$11 \overset{3}{\frown} 14 \overset{1}{\frown} 15 \overset{1}{\frown} 16 \overset{1}{\frown} 17 \overset{0}{\frown} 17 \overset{2}{\frown} 19 \overset{1}{\frown} 20 \overset{2}{\frown} 22 \overset{1}{\frown} 23$

$$\begin{array}{r} \times \; 3027 \\ 505 \\ \hline + \; 15135 \\ 151350 \\ \hline 1528635 \end{array}$$

$x < y < z < m < n$

$23 - 11 = 12$ (вес $z\,m\,n$ > веса $x\,y\,z$

01234

$14 - 11 = 3$

345

$x + y + z = 11$ ~~$y + z$ $x + y + m$~~

$x + y + m = 14$

123

2030 $x_1, x_2, \dots, x_{2030}$ $\sqrt{2} - 1$ $\sqrt{2} + 1$

x y

$$\begin{array}{r} 1528635 \\ - \; 508032 \\ \hline 1020603 \\ + \; 1009 \\ \hline 1021612 \end{array}$$

~~$\sqrt{2}-1$~~ $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) \dots$

$2 \cdot 1$ или

$\boxed{2 + 1 + \sqrt{2}}$

$\underline{\frac{xy + xy}{2}} + xy \dots$

или

$\frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3$

$\underbrace{xx + yy}_{3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}} + xx + yy$

6

0 1 2 3 4 5 6

6543 - 12

$f(x) = |x| + |x + 1| + \dots + |x + 2018|$

~~При раскр~~ т.к.

1008

$|x| + |x + 1| + |x + 2|$

504

$0 + 1 + 2 : 2 = 0$

-2 -1 0

$0 + 1 + \underline{2} + 3 + 4$

$$\begin{array}{r} \times \; 1008 \\ 504 \\ \hline 4032 \\ + \; 50400 \\ \hline 508032 \end{array}$$

$-3x - 3$ $-2x + 1$ $x + 3$ $3x + 3$ $x + 1 + x + 2 - x =$

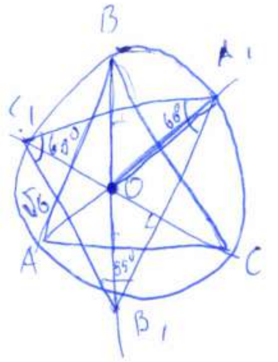
$|x| + |\cancel{x+1}| + |x + 2| = x + 3$

$$\begin{array}{r} + \; 2018 \\ 1009 \\ \hline 3027 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \; 3027 \\ 505 \\ \hline \end{array}$$

или

180
120



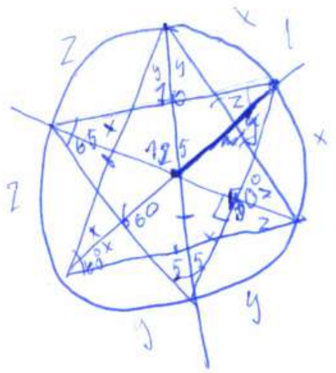
55°

$$2R = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{3} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 2}{3} = 2\sqrt{2}$$

$B_1C_1 = \sqrt{6}$

$R = 2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 180 \\ -\ 55 \\ \hline 125 \end{array}$$



$5^\circ = x - z$

$60^\circ = 2x$

$10^\circ = y - z$

$70^\circ = 2y$

$2z = 70^\circ$

30 25

$-10^\circ = z - x$

$z = 20^\circ$

$-10^\circ = z - y$

$50^\circ = 2z$

$65^\circ = y + x$

$55^\circ = z + x$

$60^\circ = y + z$

$5^\circ = x - z$

$2x = 60^\circ$

$x = 30^\circ$

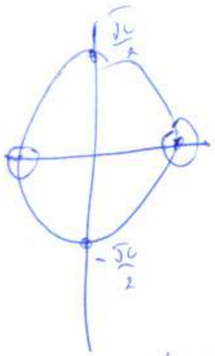
$10^\circ = y - z$

$70^\circ = 2y + z$

$y = 35^\circ$

a, b, c $\quad 0 < a, b, c < 1$

$$\sqrt{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2 c} + \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2 c} < 1$$



$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \underbrace{\sin c}_{<1} + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \underbrace{\cos c}_{<1} < 1$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta < 1$$

$$\cos(\alpha + \beta) < 1$$

$(0; 2\pi) \setminus \{\pi\}$

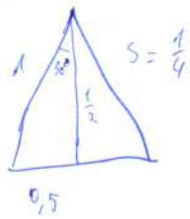
$\sin(a+\beta) = \sin a \cdot \cos$

$\cos(a+\beta) =$

$\frac{1}{3}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

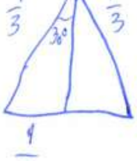
1



$\frac{1}{4}\sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} =$

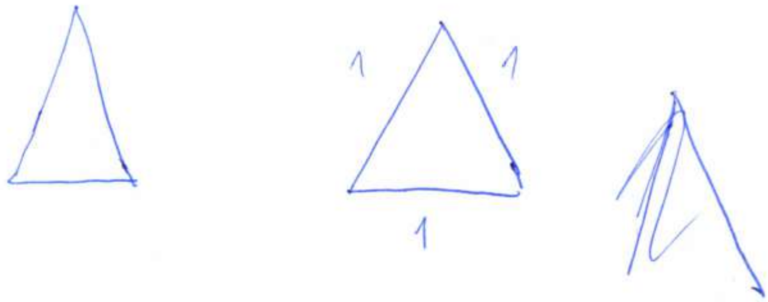
$\frac{1}{4}$

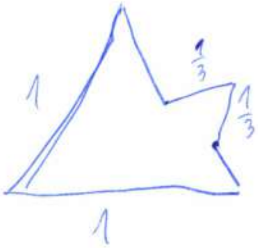


$$\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36-9}{36\cdot 9}} = \sqrt{\frac{27}{36\cdot 9}} = \sqrt{\frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6+3\sqrt{3}}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1





$3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

$3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

$3 \quad 3 + \frac{1}{3} \quad 3 + \frac{1}{9} \ldots$

2020 N камней k камней, только если

N: k 4 8

1 1 1 1 1 1 1

1 A

$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2047$

xyz
xym
yzm
xzm

$x + x + x+1 + x+3 + x+2$

$\overset{5}{c} \vee \vee$
10

$5x + 5 = 3\cancel{4}1 + x + 2$

xyz

2 3 6 8 9
1 4 6 ~~9~~ 9

$x < y < z < m < n$

$\cancel{x}\ k + k + \cancel{k} + 1 + k + 2 = 11$

$x + y + z = 11$

$x + y + m = 14$

$x + z + m = 15$

$y + z + m = 16$

$y + z + n = 17$

$m = z + 3$

$z = y + 1$

$y = x + 1$

$n = m + 1$

$k = \cancel{2}, 3$

$x = 3$

$y = 4$

$z = 5$

$$\begin{array}{r} 23 \\ -\ 11 \\ \hline 12 \end{array}$$

$23 - 11 = 14$

$2z = 12$

$z = 6$

$x + y = 5$

$11 \overset{3}{\frown} 14 \overset{1}{\frown} 15 \overset{1}{\frown} 16 \overset{1}{\frown} 17 \overset{0}{\frown} 17 \overset{1}{\frown} 19 \overset{1}{\frown} 20 \overset{2}{\frown} 22 \overset{3}{\frown} 23$

$x = 3 + z$

2 3

9 6 1

$9 + 6 = 15$

$11 = 6 + 5 \quad 14 = 6 + 8$

$x^1 = 1 \quad y = 4 \quad z = 6$

$x = 1 \quad y = 4 \quad z = 6 \quad m = 8 \quad n = 9$

$5 \cdot 3$

$m + n - x - y = 14$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 16 \\ \hline 96 \\ +\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$3^4 = 81$

$4^4 = 2^8 = 5 = 256$

$$\begin{array}{r|l} 2047 & 7 \\ -14 & \overline{29} \\ \hline 64 & \\ -63 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

5^4 6^4

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 36 \\ \hline 216 \\ +\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

2047

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

$7^4 =$

1, 16, 81, 256, 625, 1296

2401

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 49 \\ \hline 441 \\ +\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ \times\ 2 \\ \hline 2616 \end{array}$$

625

$$\begin{array}{r} 625 \\ +\ 256 \\ \hline 881 \\ +\ 1296 \\ \hline 2177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ +\ 1296 \\ \hline 2220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\ 256 \\ \hline 1452 \\ +\ 256 \\ \hline 1708 \\ +\ 256 \\ \hline 1964 \\ +\ 81 \\ \hline 2045 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1964 \\ +\ 16 \\ \hline 1980 \\ +\ 16 \\ \hline 1996 \\ +\ 16 \\ \hline 2012 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2012 \\ +\ 16 \\ \hline 2028 \\ +\ 16 \\ \hline 2044 \end{array}$$