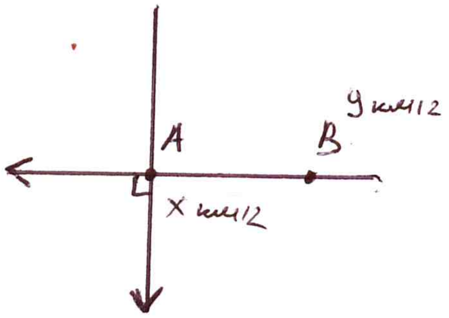
Чистовик

№1.



Пусть x км/ч – скорость автомобиля A, тогда y км/ч скорость автомобиля B (двигаются в указанных направлениях). Тогда по условию A прошел x км за 1ч и удалился от перекрестка на x км, а B удалился от перекрестка на $(200-y)$ км, что по условию равно. Через 4 часа после начала отсчета A удалился от перекрестка на $4x$ км, а B на $(4y-200)$ км (в течение этого времени он проехал перекресток), что по условию равно. Получаем систему:

$$\begin{cases} x = 200-y \\ 4x = 4y-200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200-y \\ 800-4y = 4y-200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200-y \\ 8y = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 125 \end{cases}$$ +

Ответ: 75 км/ч (A) и 125 км/ч (B)

№2.

Пусть начальный капитал компании равен 1, тогда пусть y – количество проектов, в которые были вложены деньги, а x – успешные проекты. Тогда $\frac{1}{y}$ – деньги, вложенные в 1 проект, $\frac{x}{y}$ – деньги вложенные в успешные проекты, а $\frac{y-x}{y}$ деньги, вложенные в неудачные проекты, тогда $\frac{5x}{4y}$ деньги, полученные от успешных проектов, а $\frac{y-x}{4y}$ деньги, полученные от неудачных проектов, $\frac{5x+y-x}{4y}$ капитал компании через год, который по условию равен $\frac{6}{5}$. ($x, y \in N$; $y \le 25$; $x < y$)

$$\frac{5x+y-x}{4y} = \frac{6}{5}$$

$$20x + 5y = 24y$$

$$20x = 19y$$

Чтобы равенство было верным y должен заканчиваться на 0. Из натуральных чисел, удовлетворяющих условию таковых два: 10 и 20

$20x = 190$

$x = \frac{19}{2}$

$x \notin N \Rightarrow$ не подходит

$20x = 380$

$x = 19$

$x \in N$

$x < y$ $(19 < 20)$

+

Ответ: 19

№ 3

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2014^3 \vdots 2015 \ ?$$

$$(1^3 + 2014^3) + (2^3 + 2013^3) + \ldots + (1007^3 + 1008^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2014^3$$

$$2015(1 - 2014 + 2014^2) + 2015(4 - 4026 + 2013^2) + \ldots + 2015(1007^2 - 1007 \cdot 1008 + 1008^2) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2014^3$$

$$2015(1 - 2014 + 2014^2 + 4 - 4026 + 2013^2 + \ldots + 1007^2 - 1007 \cdot 1008 + 1008^2) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2014^3$$

$$2015(1 - 2014 + 2014^2 + 4 - 4026 + 2013^2 + \ldots + 1007^2 - 1007 \cdot 1008 + 1008^2) \vdots 2015$$

$$\Downarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2014^3 \vdots 2015$$

+

ч.т.д.

№ 4.

а) Рассчитаем среднюю скорость мусоровоза:

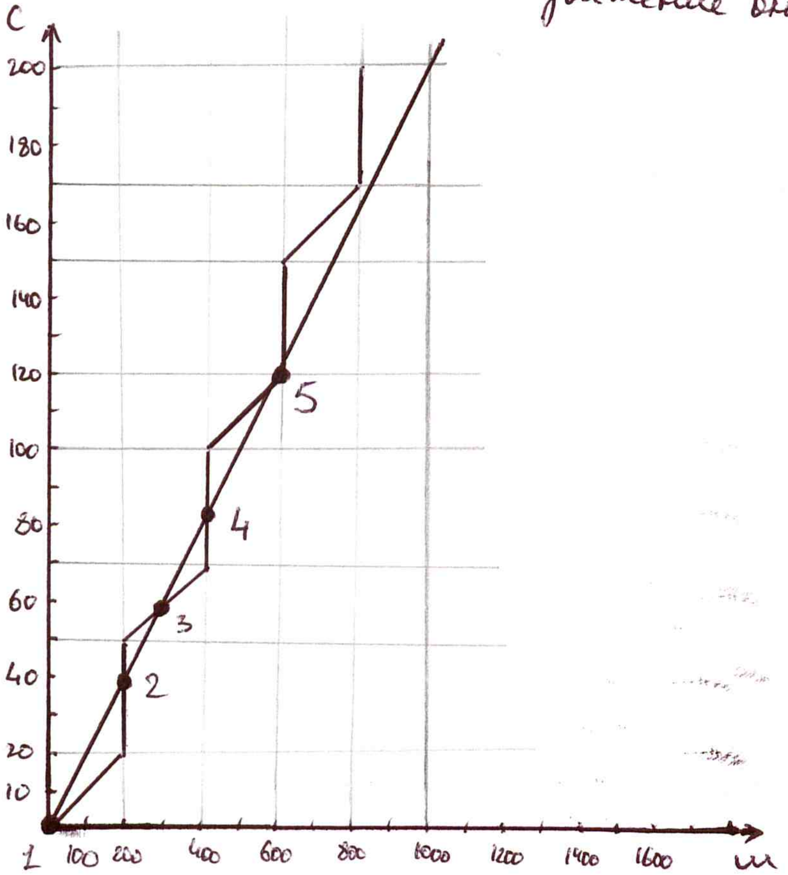
Возьмем расстояние 200м, которое он проходит за $\frac{200}{10} = 20$с, но в конце этого отрезка он делает остановку в 30с, значит с учетом остановки он проходит это расстояние за $20 + 30 = 50$с, а его средняя скорость равна $\frac{200}{50} = 4$м/с.

Пусть xс потребовалось Пете, чтобы догнать мусоровоз, тогда $5x$ м прошел Петя, а $4x$ м прошел мусоровоз, но по условию Петя прошел на 200м больше; на основе этих данных составим ур-е

$5x = 4x + 200$

$x = 200$

б) Чтобы понять сколько раз Петя и мусоровоз встретятся построим график зависимости пройденного расстояния от времени с момента первой встречи. (т.к. корнем ур-я явилось целое число в этот момент движение они начали одновременно)



Теперь сосчитаем точки пересечения:

Всего их 5 шт.

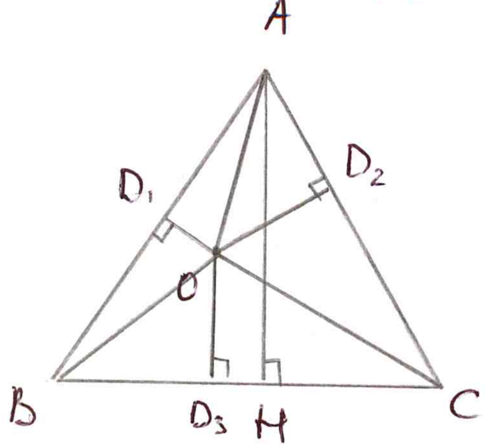
Докажем, что т. (600, 120) – последняя, и графики не пересекутся при значении 800 м.

Петя проедет 800 м за $\frac{800}{5} = 160$с, а мусоровоз за $\frac{600}{4} + \frac{200}{10} = 170$с

$160 \neq 170$

Ответ: а) через 200с б) 5 раз

№5.



Дано: $\triangle ABC$ – равностор. $(AB=BC=AC)$; $O \in \triangle ABC$

$OD_1 \perp AB$; $OD_2 \perp AC$; $OD_3 \perp BC$

$OD_1 = 4$км; $OD_2 = 9$км; $AH \perp BC$;

$AH = 20$км.

Найти: OD_3 - ?

Решение: AH - высота - по опред. => AH - биссектр. - по св-ву равностор. $\triangle$.

=> $\angle BAH = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ – св-во равностор $\triangle$; определ. биссектр. [redacted]

[redacted] $AB \cdot \sin BAH = BH$

$AB \cdot \sin 30 = BH$

$\frac{AB}{2} = BH$

Пусть $BH = a$, тогда по т. Пифагора

$a^2 + 40 = 4a^2$

$3a^2 = 40$

$a = \frac{2\sqrt{30}}{3} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{30}}{3} \Rightarrow AB = BC = AC = \frac{4\sqrt{30}}{3}$.

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{40\sqrt{30}}{3}$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} OD_1 \cdot AB = \frac{8\sqrt{30}}{3}$

$S_{AOC} = \frac{1}{2} OD_2 \cdot AC = \frac{18\sqrt{30}}{3}$

$S_{BOC} = S_{ABC} - S_{AOB} - S_{AOC} = \frac{14\sqrt{30}}{3} = \frac{1}{2} OD_3 \cdot BC$

$\frac{1}{2} OD_3 = \frac{14\cancel{\sqrt{30}} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 4\cancel{\sqrt{30}}} = 3{,}5$

$OD_3 = 7$.

Ответ: 7 км

№8.

$N = \underbrace{1\ldots1}_{n}$ (n – количество цифр числа N)

а) $N \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$
$N \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$ | $\Rightarrow n \vdots 9$ (т.к. $9 \vdots 3$) $\Rightarrow n = 9$ [redacted]

Ответ: 111.111.111 [redacted]

б) Если существует такое число $\underbrace{1\ldots1}_{n} \vdots 43$, то существует такое k, где $43k = \underbrace{1\ldots1}_{n}$ (т.к. 43 – простое)

$$\begin{array}{r} \times\, 43 \\ \ldots \\ \hline \underbrace{1\ldots1}_{n} \end{array}$$

Найдем все произведения 43 и однозначного числа:

$43\cdot1=43$; $43\cdot2=86$; $43\cdot3=129$; $43\cdot4=172$; $43\cdot5=215$; $43\cdot6=258$; $43\cdot7=301$; $43\cdot8=344$; $43\cdot0=0$; $43\cdot9=387$

Исходя из правила умножения в столбик, последняя цифра числа k должна быть 7.

$$\begin{array}{r} \times\, 43 \\ \ldots7 \\ \hline 301 \\ +\ \ldots\ \ \\ \hline \ldots1 \end{array}$$

Предпоследняя также 7 (произведение заканчивается на 1)

$$\begin{array}{r} \times\, 43 \\ \ldots77 \\ \hline 301 \\ +\ 301\ \ \\ \ldots\ \ \ \ \\ \hline \ldots11 \end{array}$$

[redacted] 3я с конца – 6 (произведение заканчивается на 8)

$$\begin{array}{r} \times\, 43 \\ \ldots677 \\ \hline +\ 301 \\ +\ 301\ \ \\ +\ 258\ \ \ \ \end{array}$$

~~4я с конца − 1 (произведение заканчивается на 3)~~

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times \ \ldots 1677 \\ \hline 301 \\ 301\ \ \\ 258\ \ \ \ \\ 43\ \ \ \ \ \ \\ \ldots \\ \hline \ldots 1111 \end{array}$$

~~5я с конца − 5 (произведение заканчивается на 5)~~

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times \ \ldots 51677 \\ \hline 301 \\ 301\ \ \\ 258\ \ \ \ \\ 43\ \ \ \ \ \ \\ 215\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \ldots \\ \hline \ldots 11111 \end{array}$$

~~Далее~~

При умножении 43 на „k" каждый разряд будет представлен суммой 3 или 4 цифр. Произведения 43 и всех однозначных чисел заканчиваются на все существующие цифры, а значит в каждом разряде всегда можно получить 1, потому что последнее слагаемое суммы каждый раз свободно задается, а значит существует такое число k, где $43 \cdot k = \underbrace{1 \ldots 1}_{n}$.

(−+)

Ответ: да

№ 7.

$4x^2 - 40[x] + 51 = 0$

$40[x] = 4x^2 + 51 \Rightarrow x \geq 0$ (т.к. $4x^2 + 51 > 0$)

$[x] = \frac{x^2}{10} + \frac{51}{40}$

(−+)

Не все решения!

Пусть $x = \frac{a}{b}$, тогда

$[x] = \frac{a^2}{10b^2} + 1\frac{11}{40} \Rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{29} \\ b = 2 \end{cases}$ [redacted] $(a^2 = 40 - 11;\ a^2 = 29)$ $(10b^2 = 40;\ b^2 = 4)$ $\Bigg| \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{29}}{2}$

Чистовик.

№7 (продолжение)

Финансовый университет
при Правительстве
Российской Федерации
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ
ШИФР 160585

Проверка:

$\cancel{\left[\frac{\sqrt{29}}{2}\right] - \left(\frac{-\sqrt{29}}{2}\right)^2 \cdot 10 \cdot 2 + 1\frac{11}{40}}$

$\cancel{2 = \frac{29}{4}}$

−

$$4\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 - 40\left[\frac{\sqrt{29}}{2}\right] + 51 = 0$$

$$29 - 80 + 51 = 0$$

$$0 = 0.$$

Ответ: 1

№6.

+

Дано 179 чисел. Если сумма любых 9 из них >0, то если n – количество отрицательных чисел, то $n \le 8$ (т.к. если $n \ge 9$ то хотя бы одна из сумм 9 слагаемых будет <0, чего не может быть). Из этих 179 чисел можно составить 19 групп по 9 чисел и 1 группу, где будет 8 чисел. Поместим каждое из 8 отрицательных чисел в отдельную группу. По условию каждая такая группа будет >0, а еще 11 будут содержать только положительные числа, значит сумма всех этих групп будет >0. ч.т.д.

7