Чистовик

№ 1

+

Б – баллы Бори   А – баллы ~~Ан~~ Ани

Д – баллы Димы   К – баллы Кати

условие:

$Б + Д = А + К$

$К + Д < Б + А$

$Д > Б$; $Д > К$.

1) $Б < К$ т.к. ~~е~~ если поменять их местами, то сумма баллов из которой убрали Б и добавили К увеличилась.

2) $Д > А$ т.к. если предположить обратное

$\cancel{Б} + \cancel{Д} = А + К$ – неверно

$x \quad (x = А - Б)$

$БД = x + К$, но $Б < К$.

Дима набрал больше ~~всех~~ всего баллов.

3) $Б < А$ т.к. если $Б > А$:

$\cancel{Б} + Д = \cancel{А} + К$

$(y = Б - А)$

y

$y + Д = К$ – неверно $(Д > К)$

Боря набрал меньше ~~всех~~ всего баллов

~~з кач~~

В.

4) ~~А≥~~$К$

$\cancel{К} + \cancel{Д} < Б + А$

$К + \cancel{Z} < А$

$(Z = Д - Б) \Rightarrow$

$\Rightarrow К < А$

Ответ: Дима, ~~Боря~~, Аня, Катя, Боря

№ 4

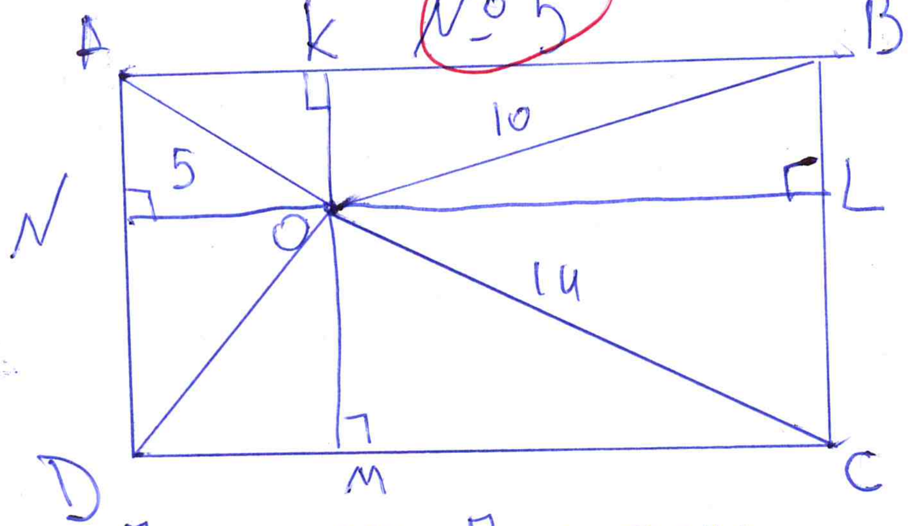
+

В условии известно, что в трёх регионах 1, 2 и 3 участника, значит в остальных (9−3)=6 регионах ~~…~~ 31−3−2−1=25 участников оставшихся.

Допустим, что среди 6и регионов нет региона представленного 5 участниками, тогда их не больше 6·4=24, но 24<25 — противоречие

№ 5

+



По теореме Пифагора:

$5^2 = AK^2 + KO^2 = 25$ $\quad 14^2 = OL^2 + LC^2 = 196$

$10^2 = KO^2 + OL^2 = 100$ $\quad DO^2 = AK^2 + LC^2$ $\quad ON = AK;\ ND = LC$

~~$14^2 = OL^2 + LC^2 = 196$~~

$AK^2 + KO^2 + OL^2 + LC^2 = 196 + 25 = 221 = S$

$AK^2 + LC^2 = S - KO^2 - OL^2 = 221 - 100 = 121 = DO^2$

$DO^2 = 121$ $\quad DO = \boxed{11}$ Ответ: 11 км

№2

$x+y=77$

x – кол-машин, проданных по полной цене

y – — и — со скидкой

n – цена одной машины, деленная на 1000

$xn+\frac{yn}{2}=\cancel{2016}$ 4030 ?

$2xn+yn=\cancel{2015}$ 4030

Неточность в обосновании

$2x+y=\frac{4030}{n}$

$x=\frac{4030}{n}-77$ $\frac{4030}{n}$ – целое т.к. x – целое и 77 – целое

7

$4030=10\cdot403$

$403\cdot10=31\cdot13\cdot5\cdot2$ – разлож. на прост. множители

варианты n – 4030; 2015; 806; 310; 130; 403; 155; 62; 65; 26; 10; 31; 13; 5; 2.

рассмотрим 26: $x=\frac{4030}{26}-77=78>77\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 26 и меньше неподходят

рассмотрим 62: $x=\frac{4030}{62}-77=-12<0\Rightarrow$ 62 и больше неподходят

рассмотрим 31:

$x=\frac{4030}{31}-77=130-77=53$ – за полную цену

77 – 53 = 24 – со скидкой

Ответ: 24 штуки машины (цена – 31 000)

№3

+

$x^2 + -ax + 2015 = 0$

$D = a^2 - 4 \cdot 2015$

$x_{1;2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 8060}}{2}$

чтобы $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, — надо, чтобы $a > \sqrt{a^2 - 8060}$

и $a^2 > 8060$ $(D > 0)$ и $\sqrt{a^2 - 8060}$ — целое, кратное 2

a — целое

~~$\sqrt{806}$~~

$\sqrt{8060} \approx 89{,}97$

~~надо сначала взять меньшее a~~

~~$a^2 = 8100$~~ ~~$a = 90$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{40}$~~

~~не подходит~~

~~$D = \sqrt{40}$~~

~~$a = 91$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{221}$~~

~~Ответ: 90~~

~~минимальное значение~~ $\sqrt{a^2 - 8060} - 2$

$a = 90$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{40}$ — не подходит

$a = 91$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{221}$ — не подходит

$a = 92$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{404}$ — не подходит

$a = 94$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{776}$ — не подходит.

$a = 96$ $\sqrt{a^2 - 8060} = \sqrt{1156} = 34$ — подходит

Ответ: при $a = 96$

№6

+

Пётр, Алексей, Михаил и Сергей в сумме оформили $44-5-4-3-2=30$ депозитных договоров.

Сергей мог оформить ~~8, 12~~ $2\cdot4=8$; $3\cdot4=12$; $4\cdot4=16$; $4\cdot5=20$ договоров

1) Если он оформит 20 договоров, то как минимум будет оформлено $20+\underbrace{3\cdot2}_{\text{Михаил}}+\underbrace{2\cdot3}_{\text{Алексей}}+\underbrace{1\cdot4}_{\text{Пётр}}=36>30$ договоров

Если Сергей оформил 16 договоров, то как ~~минимум~~ минимум будет оформленно $16+3\cdot2+2\cdot3+1\cdot5=33>30$ договоров

Если Сергей оформил 12 договоров, то как минимум ~~был~~ будет оформленно $12+3\cdot2+2\cdot4+1\cdot5=31>30$ договоров

Значит Сергей оформил 8 договоров, и работает с Ивановым в „Городском" банке.

2) Михаил может оформить ~~9~~ $1\cdot3\cdot3=9$; $3\cdot4=12$; $3\cdot5=15$ договоров. Если он оформил 15, то как минимум будет оформленно $8+15+2\cdot3+1\cdot4=33>30$ договоров

если он оформил 12, то минимум будет $8+12+2\cdot3+1\cdot5=31>30$

Значит ~~Сергей~~ Михаил оформил 9 договоров. ~~Тогда на~~ 1 и работает в „Первом" банке с Андреем.

№6 (продолжение)

3) На Петра и ~~Алек~~ Алексея осталось $30-8-9=$ $=13$ договоров. Они могут сделать или ~~$2\cdot5$~~ $10+$ $2\cdot5+4\cdot1=14\neq13$ договоров или $2\cdot4+1\cdot5=$ $=13$ договоров. Значит Пётр работает с Максимом в „Доходном" банке, а Алексей работает с Николаем в „Надёжном" банке.

Ответ: Иван – „Городском" банк
Андрей – „Первый" банк
Николай – „Надёжный" банк
Максим – „Доходный" банк.

№7

+

когда одна группа делится на 6 других то кол-во групп увеличивается на 5, значит формула для вычисления их кол-ва:

~~12~~ $12+5\cdot n$, где n – кол-во делений одной группы на 6.

$2015=12+5n$

$2003=5n$ – не верно, значит Сергей не мог сказать правду

Ответ: Сергей солгал.

Чистовик

Финансовый университет
при Правительстве
Российской Федерации

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ШИФР 160571

N1

Пусть Боря набрал b баллов, Дима – d, Аня – a и Катя – k.
По условию, $b+d=a+k$; $k+d<a+b$; $d>b$; $d>k$.

1) $k=b+d-a \Rightarrow \cancel{b}+d-a+d<a+\cancel{b} \Rightarrow 2d<2a \Rightarrow a>d$, т.е. у Ани больше баллов, чем у Димы, но т.к. $d>b$ и $d>k$, то Аня набрала максимальное кол-во баллов. После неё идёт Дима.

+

2) $d=a+k-b$
$k+\cancel{a}+k-b<\cancel{a}+b \Rightarrow 2k<2b \Rightarrow b>k$, т.е. у Бори больше баллов, чем у Кати.

Ответ: (в порядке убывания) Аня, Дима, Боря, Катя.

N2

Пусть p – изначальная цена, тогда часть была продана за $0{,}5p$.
Пусть за $0{,}5p$ было продано x машин, тогда за p – $(77-x)$. Получаем:

$p(77-x)+0{,}5px=2015000$
$77p-xp+0{,}5xp=2015000$
$77p-0{,}5xp=2015000$
$p(77-0{,}5x)=2015000$

$\begin{cases} x>0 \\ x\le 77 \\ x\in\mathbb{N} \end{cases}$

Найти: x.

+

Пусть $\underset{(k\in\mathbb{N})}{p=1000k} \Rightarrow \underset{\in\mathbb{N}}{k}(77-0{,}5x)=\underset{\in\mathbb{N}}{2015} \Rightarrow (77-0{,}5x)\in\mathbb{N}$ и $\frac{2015}{k}\in\mathbb{N}$

Последнее возможно в случае, если $2015 \vdots k$. Т.к. $k\in\mathbb{N}$ и $2015 = 5\cdot13\cdot31$, то $k\in\{5; 13; 31; 5\cdot13; 13\cdot31; 31\cdot5; 5\cdot13\cdot31\}$. Рассм-им случаи.

1) $k=5 \Rightarrow 403=77-0{,}5x \Rightarrow x<0$, W
2) $k=13 \Rightarrow 155=77-0{,}5x \Rightarrow x<0$, W
3) $k=31 \Rightarrow 65=77-0{,}5x \Rightarrow 0{,}5x=12 \Rightarrow \boxed{x=24}$
4) $k=5\cdot13 \Rightarrow 31=77-0{,}5x \Rightarrow x>77$, W
5) $k=13\cdot31 \Rightarrow 5=77-0{,}5x \Rightarrow x>77$, W
6) $k=31\cdot5 \Rightarrow 13=77-0{,}5x \Rightarrow x>77$, W
7) $k=5\cdot13\cdot31 \Rightarrow 1=77-0{,}5x \Rightarrow x>77$, W

Ответ: 24 машины.

№3

$x^2 - ax + 2015$

x_1, x_2 – корни

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow D > 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$

$a_{мин} = 96$

Действительно, при проверке

$x_1 = 31$, $x_2 = 65$ } два различных положит. целочисленных корня

$x_1 x_2 = 2015$
$x_1 + x_2 = a$ по Т Виета

т.к. $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, то возможны случаи:

1) $x_1 = 1,\ x_2 = 2015 \Rightarrow a = 2016$
2) $x_1 = 5,\ x_2 = 403 \Rightarrow a = 408$
3) $x_1 = 13,\ x_2 = 155 \Rightarrow a = 168$
4) $x_1 = 31,\ x_2 = 65 \Rightarrow a = 96$ V
5) $x_1 = 65,\ x_2 = 31 \Rightarrow a = 96$
6) $x_1 = 155,\ x_2 = 13 \Rightarrow a = 168$
7) $x_1 = 403,\ x_2 = 5 \Rightarrow a = 408$
8) $x_1 = 2015,\ x_2 = 1 \Rightarrow a = 2016$

+

Ответ: при $a = 96$.

№4

~~31 школьник~~
~~9 регионов~~
~~Нам надо ~~достаточно~~ рассмотреть („крайний") случай, когда все 8 регионов представлены 3 участниками, т.е. из каждого приехало по 3. Значит, из них в сумме ~~остаётся~~ приехало 24 участника. На 9-ый регион остаётся 7 участников. Все в порядке.~~

+

№4

Пусть во всех регионах не больше 4 участников. Есть регионы, представленные 1, 2 и 3 участниками. Рассм-им „крайний" случай, когда есть только 3 региона в кот. 1, 2 и 3 участника, т.е. на оставшиеся 6 регионов приходится 25 участников. По принципу Дирихле, найдётся хотя бы один регион, в кот. не менее $\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$ участников. Т.к. кол-во участников – целое число, то хотя бы в 1 регионе не менее 5 участников. В „крайнем" случае мы получим противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в любом случае найдётся хотя бы 1 такой регион, ч.т.д.

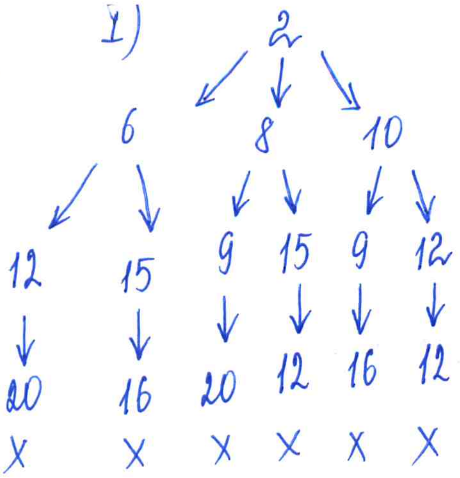
№6

Пётр	Алексей	Михаил	Сергей
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16
5	10	15	20

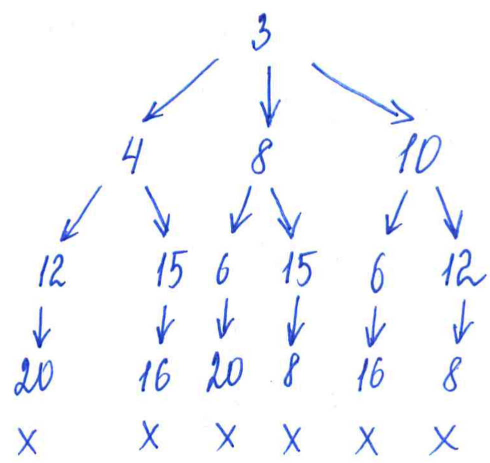
В сумме у них должно получиться 30 договоров. Из каждой строки можно выбрать только одного работника. Возможны 4! случаев (24).

~~1) $2+6+12+20 \neq 30$~~
~~2) $2+6+15+16 \neq 30$~~
~~3) $2+8+9+20 \neq 30$~~
~~4) $2+8+15+12 \neq 30$~~
~~5) $2+10+9+16 \neq 30$~~
~~6) $2+10+12+12 \neq 30$~~
~~7) $3+4+12+20 \neq 30$~~
~~8) $3+4+15+16 \neq 30$~~
~~9) $3+8+6+20$~~
~~10) $3+8+15+8$~~
~~11) $3+10+6+16$~~
~~12) $3+10$~~

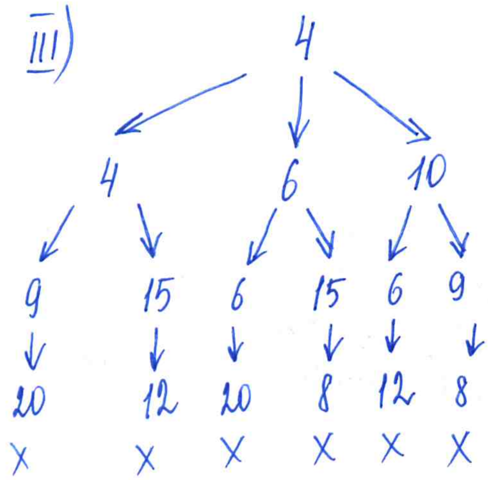
I)



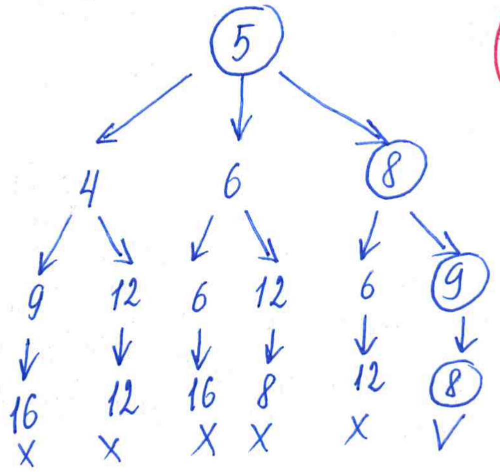
II)



III)



IV)



Единственной случай:
У Петра – 5 работает вместе с Максимом в банке „Доходный"
У Алексея – 8 работает вместе с Николаем в банке „Надёжный"
У Михаила – 9 работает вместе с Андреем в банке „Первый"
У Сергея – 8 работает вместе с Иваном в банке „Городской"
Ответ: Иван – „Городской", Андрей – „Первый", Николай – „Надёжный", Максим – „Доходный".

N7

~~[illegible]~~ сколько раз и сколько групп мы бы не делили, в результате у нас получится число, дающее 2 в остатке при делении на 5.

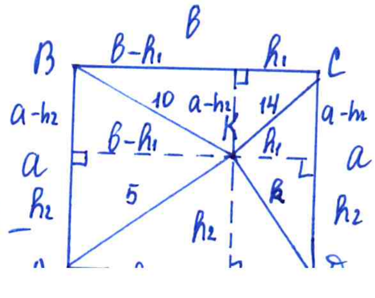
1) После первого деления: x групп поделили
$12 - x + 6x = 12 + 5x = 5k + 2$ – остаток при делении на 5: 2

2) После m-го деления: y групп поделили, предполагаем ост. $\left(\frac{n}{5}\right) = 2$
$n - x + 6x = 5q + 2 + 5x = 5z + 2$ – остаток при делении на 5: 2

Значит, после любого деления мы получаем кол-во, дающее 2 в остатке при делении на 5. Но 2015 не подходит => серий сапог.

Ответ: нет.

N5



Проведём ч/з точку рудника (K) перпендикуляры к его сторонам. Обозначим полученные отрезки на рисунке (h_1, h_2, $a-h_1$, $b-h_2$), где a и b –

стороны пр/уг. Из пр/уг $\Delta\Delta$-ков получаем:

$$\begin{cases} 10^2 = (a-h_2)^2 + (b-h_1)^2 \quad (3) \\ k^2 = h_1^2 + h_2^2 \quad (4) \\ 14^2 = h_1^2 + (a-h_2)^2 \quad (1) \\ 5^2 = h_2^2 + (b-h_1)^2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2)-(3): \quad 14^2 + 5^2 - 10^2 = h_1^2 + \cancel{(a-h_2)^2} + h_2^2 + \cancel{(b-h_1)^2} - \cancel{(a-h_2)^2} - \cancel{(b-h_1)^2}$$

$$h_1^2 + h_2^2 = 121$$

подставляем в (4): $\left.\begin{array}{l} k^2 = 121 \\ k > 0 \end{array}\right| \Rightarrow k = 11$ (км)

Ответ: 11 км.

№8

Если изначально у нас не больше 4 включённых переключателей, то, нажимая на все 12 кнопок, мы включим гирлянду.

Если же изначально 5/6/7 включённых, то станет соответственно 7/6/5 включённых, и за оставшиеся 13 нажатий нам надо включить гирлянду.

~~Оставим „в покое" одну кнопку. На остальные нажмём по одному разу. Если оставленная кнопка была включена, и у нас было из оставшихся 5 были включены, то гирлянда включится. В ином случае нажмём на 1 любую кнопку кроме оставленной. Если она была выключена, то гирлянда включится, если было 7 включённых кнопок~~

Оставим ~~три кнопки~~ половину кнопок в покое, а у остальных изменим их состояние.

−