Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440202

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	2	12	14	14	16
Сумма баллов (оценка)	90							

Члены жюри:

Подпись	Фомин В.Г. Фамилия И.О.
Подпись	Кочерова А.С. Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщикова Ю.В. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап
2016/2017 учебный год

440202

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n не превосходящих 2017, таких что квадратный трехчлен x^2+x-n раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

Задание 2. (10 баллов)

В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 2000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 2017 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

Задание 3. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n=\frac{x_{n-1}}{5}+4$ для всех $n\geq 2$. Найдите x_{2017}, если $x_1=6$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 1.

440202

$x^2+x-n=(x-x_1)(x-x_2)$; $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$D=1+4n$

Для того, чтобы корни получились целые, нужно, чтобы число $4n+1$ было полный квадрат. (корни будут целые, т.к. $x_1, x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{4n+1}}{2}$, а

$4n+1$ - нечетно $\Rightarrow \sqrt{4n+1}$ - нечетно (если $4n+1$ - полный квадрат), значит в числителе число четное, делим на 2, получаем целое)

$1+4n=y^2$, $n\leq 2017$. $\Rightarrow 1+4n\leq 8069$

$m\in\mathbb{N}$

Любой квадрат нечетного числа (кроме 1^2) представим в виде $1+4m$!

(т.к. квадрат любого нечетного числа дает остаток 1 при делении на 4)

$(1+2k)^2=1+4m$

$4k^2+4k+1=1+4m$

$\underline{k^2+k=m}$

Значит, нам необходимо посчитать кол-во нечетных квадратов до 8069.

$90^2=8100$, $89^2=7921$. до 89 у нас 45 нечетных чисел, за вычетом 1^2 это 44 числа; значит, для n возможно $\underline{44 \text{ варианта}}$.

+

Задание 2.

Рассмотрим возможные варианты цены ~~[illegible]~~ при ее изменении:

1) уменьшили на 1% : $0{,}99\cdot 2000=1980$. После такой операции цену можно будет либо не менять, либо увеличить на 10% (иначе - нецелое число алтын); Если увеличим, то цена составит $1980+198=2178$, и эту цену менять уже нельзя.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440202

Задание 4.

$$\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) \vee \frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2016}(x) > \frac{1}{2017}+\frac{1}{2017^2} \\ +\ \frac{1}{2\cdot 2016} > \frac{1}{2\cdot 2017} \\ +\ \frac{1}{3\cdot 2016} > \frac{1}{3\cdot 2017} \\ +\ \vdots \\ \frac{1}{2016\cdot 2016} > \frac{1}{2016\cdot 2017} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}=\frac{2017-2016}{2016\cdot 2017}=\frac{1}{2016\cdot 2017} > \frac{1}{2017^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2016} > \frac{1}{2017}+\frac{1}{2017^2}$$

F

$$\cancel{\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) > \frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) + \frac{1}{2017^2}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2016}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)+\frac{1}{2017^2} > \frac{1}{2017}\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)}$$

$$\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) > \frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$$

Задание 6.

a, b, c, d, e, f, g

Запишем вот таким образом:

$c-2p,\ c-p,\ c,\ c+p,\ c+2p,\ c+3p,\ c+4p.$

Тогда $b+c+d=3c=k_1^2 \Rightarrow c \geq 3,\ c \vdots 3$ (если $c \nmid 3$, то в k^2 3 будет входить один раз)

$a+b+c+d+e+f+g=7c+7p=7(c+p)=k_2^3 \Rightarrow k_2 \vdots 7$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440202

Задание 8.

Если пираты сумели разделить золотые монеты таким образом, то у любых двух ~~каждого~~ пиратов кол-во монет при делении на 10 даёт разный остаток. Т.к. от деления на 10 существует только 10 остатков, то при таком разбиении встречаются все остатки. ~~Допустим~~ Без ограничения общности, они разбили таким образом золотые монеты:

1 пират $- k_1 + 1$
2 пират $- k_2 + 2$
$\vdots$
9 пират $- k_9 + 9$
10 пират $- k_{10}$

$k_i \vdots 10$

Тогда серебряных монет было $2(k_1 + \ldots + k_{10}) + 2(1 + 2 + \ldots + 9) =$

$= 2(k_1 + \ldots + k_{10}) + 90$

Допустим, что пираты смогли разделить серебряные аналогично золотым ~~монетам~~ монетам.

Тогда разбиение примет вид:

$k_1' + 1$
$k_2' + 2$
$\vdots$
$k_9' + 9$
k_{10}'

$k_i' \vdots 10$

Сумма серебр. монет тогда

$(k_1' + \ldots + k_{10}') + 45 = 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_{10}) + 90$

$\underbrace{(k_1' + \ldots + k_{10}')}_{\vdots 10} = \underbrace{2(k_1 + k_2 + \ldots + k_{10})}_{\vdots 10} + \underset{\not\vdots 10}{45}$

Противоречие.

(+).

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Задание 7

Чистовик

440202

281 сотрудник
7 филиалов.

(281 : 7 > 40)

1) найдется филиал, в котором ≥ 41 сотрудник. (Принцип Дирихле)

2) найдется ≥141 человек одного пола (Принцип Дирихле) (281 : 2 > 140)

3) найдется филиал, в котором есть ≥21 сотрудников одного пола (Принцип Дирихле) (141 : 7 > 20)

Рассмотрим этот филиал и этих ≥21 сотрудников

Возьмем граф. Сотрудники - вершины, если у двух сотрудников одинаковый возраст, соединяем их ребром.
Тогда в этом графе на 21 вершине не более, чем 5 компонент связности (если 6, то условие задачи не выполнено). Тогда по принципу Дирихле найдется компонента, в которой ≥5 сотрудников (21 : 5 > 4). => утверждение задачи доказано.

(+)

Задание 4. (12 баллов)

Какое из чисел больше $\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)$ или $\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$?

Задание 5. (12 баллов)

Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

Задание 6. (14 баллов)

Натуральные числа a, b, c, d, e, f и g являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c, если сумма $b + c + d$ является полным квадратом, а сумма $a + b + c + d + e + f + g$ является полным кубом.

Задание 7. (14 баллов)

В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

Задание 8. (16 баллов)

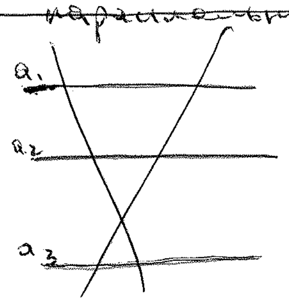
Десять пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в два раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 10. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.

Задача 5 (продолжение)

Д-во:

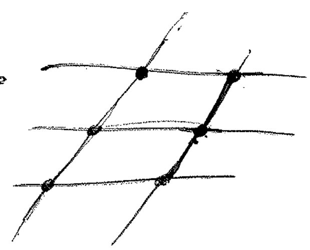
предположим, такого не произошло. Тогда без ограничения общности $a_1 \parallel a_2$, $a_3 \parallel a_4$, … $a_{2k-1} \parallel a_{2k}$. Но так как сторон $2k+1$, то $2k+1$-ая сторона должна быть параллельна какой-то из предыдущих. => лемма доказана.

~~Рассмотрим три параллельные~~ ~~прямые~~ ~~стороны в нашем 2k+1-угольнике.~~ (Эти стороны содержатся в параллельных прямых)



~~Возьмем прямую, лежащую между двух других (ту, от которой сумма расстояний до двух других минимальна~~)

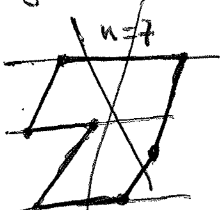
Из док-ва леммы следует, что пятиугольника, в котором выполняется условие, не существует, потому что тогда должна возникнуть вот такая ситуация: 3 стороны лежат на 3-х параллельных прямых => у нас есть минимум 6 вершин.



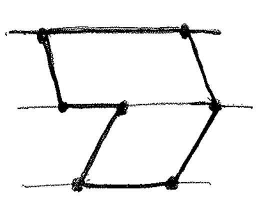
~~При этом мы должны~~ выбрать ~~из 6~~ отмеч. ~~точек 5 вершин для нашего пятиугольника~~

~~(т.к. мы знаем, что стороны лежат на этих прямых~~).

Для любого другого нечетного $n \neq 3, 5$ такой многоугольник существует

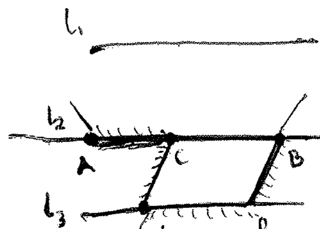


n = 7



⊕

Способ построения для нечетного $n \geq 7$:



Возьмем $l_2 \parallel l_3$. Построим параллелограмм так, чтобы эти прямые входили в стороны пара. ~~построен~~ Возьмем произвольную точку A слева от ~~от~~ отрезка CB. Построим на отрезке AB правильный $n-3$ угольник. При этом в нем образуются пары параллельных прямых. прямая, содержащая отрезок $\parallel AB = l_1$. $l_1 \parallel AC = l_1 \parallel l_3$, $C_1C \parallel BB_1$; Если же BB_1 и CC_1 оказываются параллельны какой-то паре сторон $n-3$-угольника, немного меняем расположение точек B_1 и C_1 (такое мы всегда можем сделать). Ответ: любое $n \neq 3, 5$

Задание 3.

$X_n = \frac{X_{n-1}}{5} + 4$ $\qquad X_{2017} - ?$

$X_1 = 6$

$X_2 = \frac{26}{5}$, $X_3 = \frac{126}{25}$, $X_4 = \frac{626}{125}$.

Возникает предположение:

$X_n = \frac{5^n + 1}{5^{n-1}}$ ← допустим, что это верно (индукционное предположение)

Выполним индукционный переход:

$X_n = \frac{5^n + 1}{5^{n-1}} = \frac{X_{n-1}}{5} + 4$

$\frac{X_{n-1}}{5} = \frac{5^n + 1}{5^{n-1}} - 4 = \frac{5^n + 1 - 4 \cdot 5^{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{5^{n-1}(5 - 4) + 1}{5^{n-1}} = \frac{5^{n-1} + 1}{5^{n-1}}$

$\frac{X_{n-1}}{5} = \frac{5^{n-1} + 1}{5^{n-1}}$

$X_{n-1} = \frac{5^{n-1} + 1}{5^{n-2}}$ переход выполнен. +.

$X_{2017} = \frac{5^{2017} + 1}{5^{2016}}$

Задание 5.

Сначала заметим, что для любого четного n существует правильный многоугольник, в котором стороны разбиваются на пары параллельных друг другу сторон. (по св-ву правильных многоугольников). Также, очевидно, что для n=3 такого многоугольника не существует, так как все три прямые должны быть друг другу параллельны. ~~Также заметим, что для n=5 такого многоугольника тоже не существует~~

Докажем лемму: если для данного нечетного n выполнено условие задачи, то есть существует такой многоугольник, в котором каждая сторона параллельна какой-нибудь другой стороне, то в данном многоугольнике найдутся 3 параллельные друг другу стороны.

Д-во:

Минимальный полный куб ⋮7 это 343

~~[illegible]~~ $7(c+p) \geq 343$

$$c+p \geq 49$$

$$\begin{cases} c-2p \geqslant 1 \quad (\text{т.к. } a \in \mathbb{N}) \\ c \geq 2p+1 \end{cases}$$

~~[illegible]~~

$$2c+2p \geq 98$$
$$c-2p \geq 1$$
$$3c \geq 99$$
$$c \geq 33.$$

Но $3c = k_1^2$ Проверим по возрастанию числа, которые делятся на 3 и больше 33:

$33 = 3 \cdot 11$, не подходит

$36 = 3^3 \cdot 2^2$, не подходит

$39 = 3 \cdot 13$, не подходит

$42 = 7 \cdot 2 \cdot 3$, не подходит

$45 = 3^2 \cdot 5$, не подходит

$48 = 2^4 \cdot 3$ – подходит

не будем ~~[illegible]~~ полным квадратом, если умножить на 3.

$\Rightarrow$ c не меньше 48

$3 \cdot 48 = 12^2 = 144$

пример прогрессии:

$7(48+p) = 343$

$p = 1$

~~[illegible]~~

46, 47, 48, 49, 50, 51, 52

$48+47+49 = 144 = 12^2$

$46+47+48+49+50+51+52 = 343 = 7^3$.

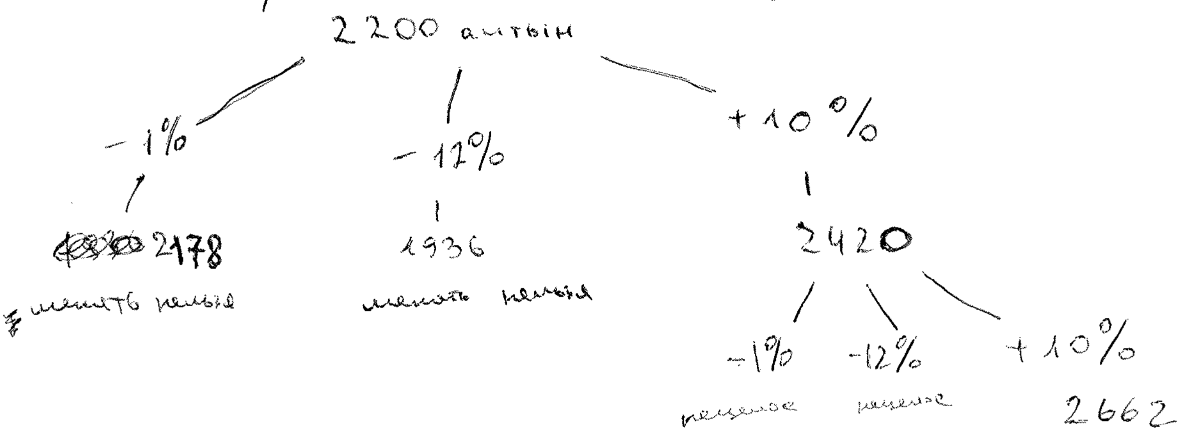
+.

2) Допустим, мы уменьшили на 12%

Тогда цена составит 2000 · 0,88 = 1760. Аналогично п. 1, цену теперь нельзя уменьшать. Если мы увеличим на 10%, то она составит

176 + 1760 = 1936, и эту цену менять уже нельзя.

3) Допустим, мы увеличим на 10%. Цена составит 2200.



менять нельзя

Значит, при любом возможных доступных операциях мы не смогли бы изменить цену до 2017. Значит, прав боярин из торговой компании.

(+)

~~Задание 3.~~

~~$X_n = \frac{X_{n-1}}{5} + 4$~~

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440 602

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12	10	14	14	16
Сумма баллов (оценка)	98							

Члены жюри:

Подпись	Гисен В.Б. Фамилия И.О.
Подпись	Фенин В.Г. Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап
2016/2017 учебный год

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n не превосходящих 1841, таких что квадратный трехчлен x^2+x-n раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

Задание 2. (10 баллов)

В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 1000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 987 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

Задание 3. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n=\frac{x_{n-1}}{4}+3$ для всех $n\geq 2$. Найдите x_{2017}, если $x_1=5$.

Задание 4. (12 баллов)

Какое из чисел больше $\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)$ или $\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$?

Задание 5. (12 баллов)

Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

Задание 6. (14 баллов)

Натуральные числа a, b, c, d и e являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c, если сумма $b+c+d$ является полным квадратом, а сумма $a+b+c+d+e$ является полным кубом.

Задание 7. (14 баллов)

В конференции принял участие 371 сотрудник из 9 различных университетов. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного университета.

Задание 8. (16 баллов)

Двенадцать пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в четыре раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 12. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.

№1

$n \overset{\leq}{\geq} 1841$ {?

$x^2+x-n = (x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и $x_2 \in Z$

$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1 x_2 = -n \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1-x_2 \\ x_2(-1-x_2) = -n \end{cases}$

$\underline{x_2(1+x_2)=n}$, следовательно, n должно быть произведением 2-х последовательных чисел, т.е

все n разные $\begin{cases} 1)\ 1\cdot 2 = 2 \\ 2)\ 2\cdot 3 = 6 \\ \ldots \\ 42)\ 42\cdot 43 = 1806,\ 1806 < 1841 \end{cases}$

43) $42 \cdot 44 = 1892$, $1892 > 1841$ - не подходит

Аналогично для отриц. X

1) $-1\cdot(-2) = 2$

2) $2\cdot(-3) = 6$

...

42) $-42\cdot(-43) = 1806$

Ответ. 42

№2

I) Увеличение на 10% $\Rightarrow$ умножение на 1,1 или на $\frac{110}{100}$; $\frac{110}{100}=\frac{2\cdot5\cdot11}{100}$

II) Уменьшение на 1% $\Rightarrow$ умножение на 0,99 или на $\frac{99}{100}$; $\frac{99}{100}=\frac{3^2\cdot11}{100}$

III) Уменьшение на 12% $\Rightarrow$ умножение на 0,88 или на $\frac{88}{100}$; $\frac{88}{100}=\frac{2^3\cdot11}{100}$

Тогда $1000\cdot\left(\frac{110}{100}\right)^n\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^k\cdot\left(\frac{88}{100}\right)^m$ – цена после n операций I, k операций II и m операций III (возможно, в ином порядке)

$\begin{array}{r|l} 987 & 3 \\ 329 & 7 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$

Получается, что если цена равна 987, то при разложении числа 987 на простые множители должны быть числа 7 и 47, но при выполнении операций I, II, III мы получаем только множители 2, 3, 5, 11, а 7 и 47 нет, значит купец никак не мог получить цену в 987 алтын

Ответ: прав боярин

№3

$x_n=\frac{x_{n-1}}{4}+3$

$x_2=\frac{x_1}{4}+3$; $x_3=\frac{x_2}{4}+3=\frac{\frac{x_1}{4}+3}{4}+3=\frac{x_1}{4^2}+\frac{3}{4}+3$

$x_4=\frac{x_3}{4}+3=\frac{\frac{\frac{x_1}{4}+3}{4}+3}{4}+3=\frac{x_1}{4^3}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4}+3$ ~~x_2~~

Предположим, что $x_n=\frac{x_1}{4^{n-1}}+\frac{3}{4^{n-2}}+\frac{3}{4^{n-3}}+\ldots+\frac{3}{4^0}$ и ~~при $n=2$ не выполнено~~

По индукции докажем, что равенство справедливо для $n\in N$, т.к. для $n=1$ – это верно, ~~предположим~~ покажем, что для $n+1$ тоже справедливо

$x_{n+1}=\frac{x_n}{4}+3=\frac{\frac{x_1}{4^{n-1}}+\frac{3}{4^{n-2}}+\ldots+\frac{3}{4^0}}{4}+3=\frac{x_1}{4^n}+\frac{3}{4^{n-1}}+\frac{3}{4^{n-2}}+\ldots+\frac{3}{4^0}$ – верно

Тогда $x_{2017}=\frac{5}{4^{2016}}+\frac{3}{4^{2015}}+\ldots+\frac{3}{4^0}=\frac{5}{4^{2016}}+3\left(\frac{1}{4^{2015}}+\frac{1}{4^{2014}}+\ldots+\frac{1}{4^0}\right)=$

$=\frac{5}{4^{2016}}+3\cdot1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2016}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{4^{2016}}+3\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2016}\right)=\frac{5}{4^{2016}}+4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2016}\right)$

Ответ. $x_{2017}=\frac{5}{4^{2016}}+4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2016}\right)$

Продолжение бланка заданий (чистовая работа)

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

440602

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№4

Пусть $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)=x$, тогда $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)=x+\frac{1}{2017}$.

Тогда $\frac{1}{2016}x$ — 1-ое число, а $\frac{1}{2017}\left(x+\frac{1}{2017}\right)$ — 2-ое число

Запишем числа в виде неравенства, где $*$ — неизвестный знак неравенства

$$\frac{1}{2016}x * \frac{1}{2017}\left(x+\frac{1}{2017}\right) \Rightarrow \frac{1}{2016}x * \frac{1}{2017}x+\frac{1}{2017^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2016\cdot 2017} * \frac{1}{2017^2} \Rightarrow x * \frac{2016}{2017} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) * \frac{2016}{2017}$$

Значит 1-е число больше второго, т.е. $\frac{1}{2016}\overset{>1}{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)} > \frac{1}{2017}\overset{<1}{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)}$

Ответ: 1-е число больше

№5

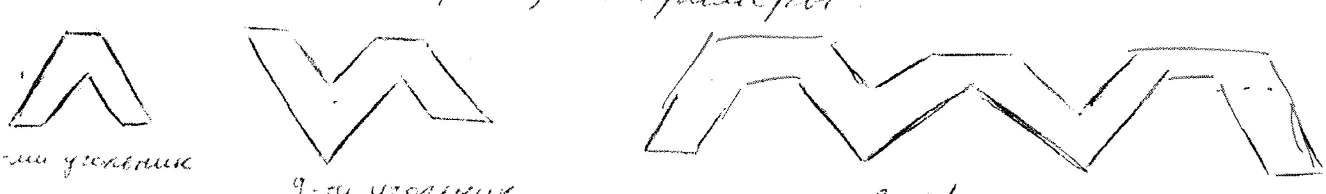
Если n - четное число, то можно построить правильный n-угольник, в котором противоположные стороны параллельны

Если $n=3$, то все стороны должны быть параллельны, а это невозможно

Если $n=5$, то, допустим, что к каждой стороне есть только одна параллельная сторона, тогда число сторон должно быть четным - противоречие

Значит к одной из сторон существ не менее 2-х параллельных ей. Возьмем 3 параллельные прямые, у них 6 концов, а 6-ти концов нельзя соединить 2-мя отрезками и получить фигуру, т.е пятиугольник невозможен

Для нечетных $n \geq 7$ приведем примеры:



7-ми угольник 9-ти угольник $2n+1$ угольник, $n>4$

Ответ: при четных $n>2$; при нечетных $n \geq 7$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Продолжение бланка заданий (чистовая работа)

440602

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

+

№6

Выразим все члены последовательности через c, где x – разн. Тогда $a = c-2x$; $b = c-x$, $d = c+x$; $e = c+2x$. Отсюда $c+b+d = 3c$ – квадрат, и $a+b+c+d+e = 5c$ – куб. Получается, наименьшее натуральное $c \geq 3$ такое что $3c$ – квадрат, а $5c$ – куб.

Разложим различные c на простые множители. В них обязаны входить 3 и 5. Тогда c будет наименьшим, если других множителей не будет, т.е.

$c = 3^n \cdot 5^k \Rightarrow 3c = 3^{n+1} \cdot 5^k$ – квадрат, зн. $n+1$ и k делятся на 2

$5c = 3^n \cdot 5^{k+1}$ – куб, зн n и $k+1$ делятся на 3

Таким образом, наименьшие n и k: $n = 3$, $k = 2$, отсюда наим $c = 3^3 5^2 = 675$

Ответ. 675

+

№7

Разобьем всех сотрудников на группы по общему полу и университету. Получим 18 групп, в одну из которых входит 21 человек. Допустим, что во всех группах ≤ 20 человек, тогда всего $18 \cdot 20 = 360$, т.е ≤ 360 человек – противоречит условию. Рассмотрим группу, в которой не менее 21 человека. Предположим, что в ней нет 5 сотрудников одного возраста, т.е сотрудников одного возраста ≤ 4, тогда всего возрастов в группе ≥ 6. Если мы возьмем 6 сотр. разных возрастов, то получим противоречие. Значит, существует 5 сотр одного пола, ч.т.д.

+

№8

Если разность 2-х чисел делится на 12, то они имеют одинаковые остатки от деления на 12, отсюда у всех пиратов остатки от деления кол-ва золотых на 12 разные, т.е

$12a_1$, $12a_2+1$; $12a_3+2$, .. $12a_{12}+11$

Тогда кол-во золотых монет. $12(a_1+a_2+ .. +a_{12})+1+2+3+..+11 = 12(a_1+a_2+ .. +a_{12})+66$

Значит кол-во серебр монет. $48(a_1+a_2+ .. +a_{12})+264$ – делится на 12

Допустим, что пираты смогут разделить серебр. монеты, т.е

$12b_1$, $12b_2+1$, ... $12b_{12}+11$, тогда всего серебр монет $12(b_1+b_2+ .. +b_{12})+66$ – не делится на 12 – противоречие

Значит пираты не смогут разделить серебр монеты таким образом. ч.т.д.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440184

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	0	12	12	6	14	14	16
Сумма баллов (оценка)	84							

Члены жюри:

Подпись — Чиссен В.Б. Фамилия И.О.

Подпись — Фомин В.Б. Фамилия И.О.

Подпись — Гребенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440184

Задача 1

$x^2+x-n \quad n\leq 2017 ; n\in N$

Для того, чтобы квадратный трехчлен раскладывался на линейные множители с целыми коэффициентами нужно $x^2+x-n=0$ и $\sqrt{D}\in N$

$D=1^2-4\cdot(-n)=1+4n$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n}}{2}$ ⟹ видно, что для того, чтобы x_1 и x_2 были целыми нужно, чтобы $\sqrt{1+4n}$ было нечетным ⟹ $\sqrt{1+4n}$ может принимать значения 3; 5; 7...

При $n_{max}=2017$:

$D=1+4\cdot 2017=8069$; это не полный квадрат, ближайший к нему ~~кв~~ квадрат 7921 (89^2) ⟹

⟹ D принимает значения ~~от~~ 3; 5; 7...; 89 ; это арифметическая прогрессия ⟹

⟹ $a_N=a_1+2\cdot(N-1)$ (посчитаем на каком месте стоит последний элемент − 89) ~~[illegible]~~

$89=3+2(N-1)$

$2(N-1)=86$

$N-1=43$

$N=44$ ⟹ всего существует 44 нат. числа n, таких, что кв. трехчлен x^2+x-n раскл. на лин. множители с целочисленными коэффициентами

Ответ: 44

+

Задача 2

Т.к. цена обязательно должна быть целым числом и её нельзя округлять, то после того как количество единиц в цене станет неравным нулю, её нельзя будет изменить.

~~[illegible]~~ ~~на 1% ... на 12%~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Исходная цена четная ⟹ проценты от нее тоже будут четными ⟹ количество единиц в цене не может быть нечетным, а т.к цена составляет 2017 (7 - нечетное число), то ясно, что купец нарушил правила торговли ⟹ боярин прав

Ответ: прав боярин

2

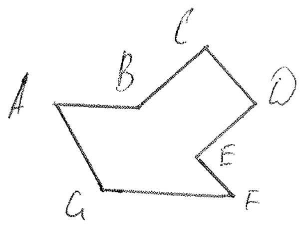
Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440184

друг другу отрезка, чего быть не может $\Rightarrow$ для $n=5$ не существует такого многоугольника, ~~...~~

Для того, чтобы существовал такой ~~...~~ многоугольник для нечетного n нужно чтобы внутр было ~~...~~ не меньше трёх групп параллельных сторон. Например:



I-я группа: $AB \parallel GF$
II-я группа: $BC \parallel DE$
III-я группа: $CD \parallel EF \parallel AG$

Значит, для всех нечетных $n \geq 7$ будет существовать такой многоугольник.
Отсюда, такой многоугольник существует для $n=4$ и всех натуральных ~~...~~ $n \geq 6$

Задание 6

a, b, c, d, e, f, g — послед. чл. ариф. прогрессии, натуральное; c будет наименьшим, если прогрессия будет возрастающей (т.к. оно ближе к началу)

$S_1 = b+c+d$ — полный квадрат

$S_2 = a+b+c+d+e+f+g$ — полный куб

Т.к. ~~...~~ это ариф. прогрессия, то: $S_1 = \frac{(b+d)}{2}\cdot 3$, $S_2 = \frac{(a+g)}{2}\cdot 7$ и $c = \frac{b+d}{2} \Rightarrow b = 2c-d$, $d = \frac{a+g}{2} \Rightarrow a = 2d-g$

$S_1 = \frac{(2c-d+d)}{2}\cdot 3 = 3c$

$S_2 = \frac{(2d-g+g)}{2}\cdot 7 = 7d \Rightarrow d_{min} = 49$ (для того чтобы S_2 была полным кубом)

т.к. c и d стоят на соседнем месте подберем c ближе к d (для того, чтобы a осталось натуральным) и S_1 была полным квадратом. Подбором находим, что $c=48$

$S_1 = 144 = 12^2$ — удовл.

$S_2 = 7\cdot 49 = 7\cdot 7^2 = 7^3$ — удовл.

Ответ: $c = 48$

Задание 8

Для того, чтобы разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делилась на 10 нужно, чтобы у ~~...~~ каждого пирата цифра ~~количество~~ единиц в количестве монет отличалось от предыдущего на 1 (Например: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 (0 отличается от 1) или 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99; 70) Тогда получается, что ~~...~~ будет

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

5 пиратов с нечетным количеством монет и 5 пиратов с четным количеством монет => ~~во~~ количество золотых монет будет нечетным, а значит, если его умножить на 2 (т.к. серебряных в 2 раза больше), то серебряных монет будет четное количество, а значит так разделить монеты не получится. ч.т.д.

Задание 7

Возьмём одного сотрудника возраста X, тогда ~~[illegible]~~ он может образовать: $(281-1):5 = 56$ групп по 6 чел => для этого сотрудника существуют на конференции минимум 56 сотрудников такого же возраста. Допустим он работает в филиале Y, тогда при ~~[illegible]~~ минимальном количестве работников одного возраста из одного филиала с ним работают: $56:7=8$ сотрудников ~~[illegible]~~ Минимальное количество сотрудников одного и того же пола будет при их равном распределении, значит ~~[illegible]~~ если сотрудник ~~[illegible]~~ – мужчина возраста X, работающий в филиале Y, мужчин с ~~[illegible]~~ такого же возраста и работающих в филиале Y будет: $8:2=4$. Значит ~~[illegible]~~ даже в самом худшем раскладе ~~[illegible]~~ для каждого ~~[illegible]~~ сотрудника найдется ещё 4 такого же возраста, пола и места работы, ~~[illegible]~~ которые и составят нужную группу из пятерых (4+1) людей ч.т.д.

~~Задача~~ 3

Рассмотрим несколько членов последовательности:

$x_1 = 6 = \frac{5^1+1}{5^0}$

$x_2 = \frac{6}{5}+4 = 5\frac{1}{5} = \frac{26}{5} = \frac{5^2+1}{5^1}$

$x_3 = \frac{26}{5\cdot 5}+4 = 5\frac{1}{25} = \frac{126}{25} = \frac{5^3+1}{5^2}$

$x_4 = \frac{126}{125}+4 = 5\frac{1}{125} = \frac{626}{125} = \frac{5^4+1}{5^3}$

$x_5 = \frac{626}{625}+4 = 5\frac{1}{625} = \frac{3126}{625} = \frac{5^5+1}{5^4}$

Видно, что данная последовательность задается формулой $x_n = \frac{5^n+1}{5^{n-1}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{2017} = \frac{5^{2017}+1}{5^{2016}}$

Ответ: $\frac{5^{2017}+1}{5^{2016}}$

Задача 4

Пусть $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016} = n$, тогда сравним

$\frac{1}{2016}\cdot n$ и $\frac{1}{2017}\left(n+\frac{1}{2017}\right)$

$\frac{n}{2016}$ и $\frac{n}{2017}+\frac{1}{2017\cdot 2017}$ $\quad |:n$ (т.к. $n\neq 0$)

$\frac{1}{2016}$ и $\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017\cdot 2017\cdot n}$

$\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}$ и $\frac{1}{2017\cdot 2017\cdot n}$

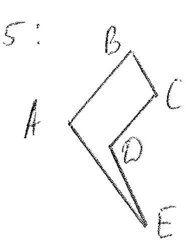
$\frac{1}{2016\cdot 2017}$ и $\frac{1}{2017\cdot 2017\cdot n}$ отсюда видно, что $\frac{1}{2016\cdot 2017} > \frac{1}{2017\cdot 2017\cdot n}$ (т.к. $n>1$), значит

$\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) > \frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$

Ответ: $\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right) > \frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$

Задача 5

Понятно, что для любого четного натурального $n>2$ существует правильный многоугольник с n вершинами, в котором каждая его сторона будет параллельна какой-либо другой стороне. Ясно, что для $n=3$ его не существует (т.к. стороны треугольника не могут быть параллельны). Рассмотрим многоугольник при $n=5$:



Допустим, что $AB \parallel DC$ и $BC \parallel DE \parallel AE$, тогда из точки E выходят 2 разных, но параллельных