

## Олимпиада 8-9 класс

### Вариант 1

1. **(10 баллов)**. Гриша записал по действительному числу в каждую клетку таблицы  $10 \times 10$ . Оказалось, что сумма чисел в любых двух строчках больше 20. Обязательно ли найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10?
2. **(10 баллов)**. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых является полным кубом?
3. **(12 баллов)**. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 500. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из написанных так, чтобы сумма любых двух из них делилась на 7?
4. **(12 баллов)**. Сумма двух положительных чисел  $a$ ,  $b$  равна 1. Докажите, что  $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$ .
5. **(12 баллов)**. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $\angle ABD = \angle ACD = 22^\circ$  и  $\angle CBD = 46^\circ$ . На диагонали  $BD$  выбрана точка  $E$  так, что  $BE = AD$ . Из точки  $E$  опустили перпендикуляр  $EH$  на сторону  $AB$ . Докажите, что  $AC > EH + CD$ .
6. **(14 баллов)**. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  провели биссектрису  $AD$ . Описанная окружность вокруг треугольника  $ABD$  пересекла сторону  $AC$  в точке  $E$ . Оказалось, что в четырёхугольнике  $ABDE$  можно вписать окружность. Найдите углы треугольника  $ABC$ .
7. **(14 баллов)**. В секретном совете участвует 101 человек, некоторые из которых друг с другом знакомы. Известно, что если на секретное собрание придут любые 52 участника этого совета, то каждый из них будет знаком хотя бы с одним из остальных 51 пришедших. Докажите, что любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.
8. **(16 баллов)**. По кругу лежат 100 корзинок, в каждой из которых лежит хотя бы одна конфета, при этом общее количество конфет равно 1500. За один ход Петя может забрать себе все конфеты из 9 подряд идущих непустых корзинок, а Вася за один ход может взять все конфеты из одной непустой корзинки, у которой хотя бы одна из соседних корзинок пуста. Начинает Петя. Докажите, что Петя гарантированно сможет забрать хотя бы 1350 конфет при любом изначальном расположении конфет и любых действиях Васи.