10 класс. Вариант 1

Задание 1. Из города А в город Б, расстояние между которыми 100 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в 17/12 раза больше скорости другого. В то же время из города Б в город А выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 10:00, а второй – в 10:20. Найдите скорость велосипедиста, выразив её в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – скорость велосипедиста, а y км/ч – скорость медленного автобуса, тогда $\boldsymbol{\frac{17}{12}y}$ км/ч – скорость быстрого автобуса.

Так после 1 часа встретились велосипедист и быстрый автобус, то $x+\frac{17}{12}y=100$. Так как по прошествии 4/3 часа встретились велосипедист и медленный автобус, то $\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}y=100$.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} x+\frac{17}{12}y=100 \\ \frac{4}{3}x+\frac{4}{3}y=100. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 16, второе на 17 и вычтем из нижнего верхнее:

$\frac{68}{3}x-16x=100$, откуда $x=15$.

Ответ: 15 км/ч.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена, получен верный ответ	++	10
Составлена и решена система уравнений, но в ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на структуру решения	+–	6
Правильно составлена система уравнений, но дальнейшего продвижения в решении нет	–+	1-3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 2. Существует ли выпуклый 73-угольник такой, что градусная мера каждого из его углов кратна пяти?

Решение. Предположим противное. Если градусная мера каждого угла кратна пяти, то каждый из них не больше 175, то есть любой из внешних углов не меньше 5. Тогда сумма всех внешних углов не меньше $73 \cdot 5 = 365$, но сумма внешних углов в любом выпуклом многоугольнике равна 360, противоречие.

Ответ: Не существует.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен и обоснован вывод о том, что соответствующий многоугольник не существует.	++	10
Выписаны все необходимые соотношения, но решение не найдено	–+–	3

Задание 3. Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^3 - b^3 - c^3 = 3abc} \\ \boldsymbol{a^2 = 3b + 3c.} \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = -b$, $z = -c$, тогда $\begin{cases} \boldsymbol{a^3 + x^3 + z^3 - 3axz = 0} \\ \boldsymbol{a^2 = -3x - 3z.} \end{cases}$

$a^3 + x^3 + z^3 - 3axz = (a + z + x)\,(a^2 + z^2 + x^2 - ax - az - zx) = 0.$

Случай 1. $a + z + x = 0$, тогда $a^2 = 3a$, откуда $a = 3$ и $b + c = 3$, откуда-либо $b = 1$, $c = 2$, либо $b = 2$, $c = 1$.

Случай 2. Заметим, что $a^2 + z^2 + x^2 \geq ax + az + xz$, причем равенство достигается только если $a = x = z$ (доказывается это раскрытием скобок в выражении $(a - x)^2 + (a - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$). Но мы знаем, что a – натуральное, но

$x = z < 0$.

Ответ: (3; 2; 1), (3; 1; 2).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен и обоснован верный ответ	++	12
Найдены два решения, доказательство того, что отсутствуют другие решения содержит пробел (разобраны все необходимые случаи, кроме одного)	+–	8
Правильно сделано разложение на множители первого уравнения, но дальнейшего продвижения в решении нет	–+	4
Найдены два решения, но не доказано отсутствие других решений	–*	1
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 4. Является ли простым число $2\ldots27999\ldots9$? (сначала 2 написано 2024 раза, затем 9 написано 2024 раза).

Решение. Заметим, что 111111 делится нацело на 7, значит, y = 222...2 написанное 2022 раза делится нацело на 7. Аналогично z = 99..9 написанное 2022 раза делится нацело на 7. Докажем, что 22799 (недостающий кусок) делится нацело на 7: $22799 = 21 \cdot 1000 + 1400 + 350 + 49$ (каждое слагаемое делится нацело на 7).

Наше число это $y \cdot 10^{2025} + 22799 \cdot 10^{2022} + z$, каждое слагаемое делится нацело на 7, значит, сумма делится нацело на 7.

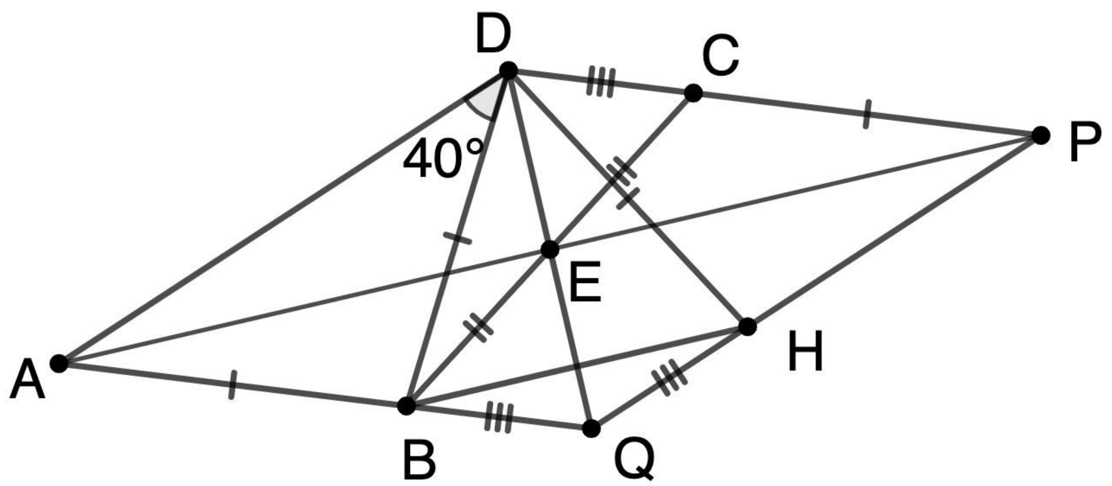
Получаем, что наше число делится нацело на 7, значит, оно не может быть простым.

Ответ: нет, не является.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12
Допущена арифметическая ошибка, которая не влияет на ход решения задачи	+–	10
Решение содержит логический пробел (данное число представлено в виде суммы, делимость на найденный делитель установлена не для всех слагаемых)	–+	4
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD оказалось, что $\angle BAD = \angle ADB = 40^\circ$ и $AB + CD = AD$. Найдите угол DAC.

Решение. Отметим середину сторону BC точку E. Продлим луч AE до пересечения с прямой DC в точке P и луч DE до пересечения с прямой AB в точке Q.



Из равенства треугольников AEB и PEC получаем, что $AD = AB + CD = DC + CP = DP$, откуда ADP – равнобедренный треугольник. Аналогично равны треугольники DEC и QEB, откуда равнобедренным является треугольник ADQ. Получаем, что четырёхугольник $ADPQ$ является ромбом.

Отразим точку B относительно диагонали DQ, получим точку H. Так как $\angle ADP = 180^\circ - \angle DAB = 140^\circ$, то $\angle ADQ = 70^\circ$ и $\angle BDQ = 30^\circ$. Получаем, что в равнобедренном треугольнике BDH угол BDH равен 60 градусов, значит, треугольник BDH равносторонний.

Треугольник BQH равнобедренный, поэтому $BH \| AP$, то есть трапеция $ABHP$ равнобедренная. Из этого получаем, что $AB = BD = BH = HP$, то есть $\angle HAP = \angle AHB = \angle BAH = 10^\circ$. В силу симметрии в ромбе $\angle CAP = \angle HAP = 10^\circ$.

Ответ. 10°.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12
Допущена арифметическая ошибка, которая не влияет на ход решения задачи	+–	10
Решение содержит логический пробел и/или ответ не найден	–+	4
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 6. Сколько существует решений уравнения

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 1023$$

в целых числах? Напомним, что решения уравнения различны, если в них хотя бы у одной переменной отличаются значения.

Решение. Прибавим единицу к обеим частям и преобразуем уравнение:

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 2^{10}.$$

Таким образом, $a + 1 = \pm 2^{a_1}$, $b + 1 = \pm 2^{b_1}$, $c + 1 = \pm 2^{c_1}$. Числа a_1, b_1, c_1 — целые неотрицательные, при этом выполнено $a_1 + b_1 + c_1 = 10$. Используя метод шаров и перегородок (10 шаров и 2 перегородки) получаем, что количество различных троек (a_1, b_1, c_1) равно $C_{12}^2 = \frac{12\cdot 11}{2}$=66. Теперь посчитаем количество способов расставить плюсы и минусы. Количество минусов равно двум или нулю. Существует 3 варианта выбрать расположение двух минусов и 1 вариант, если минусов нет. Таким образом, количество различных троек

$(a+1, b+1, c+1)$ равняется $66 \cdot 4 = 264$. Каждый из этих вариантов однозначно определяет уникальную тройку (a, b, c), что и требовалось.

Ответ: 264.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	14
Левая часть +1 разложена на множители и верно подсчитано распределение двоек по множителям, но комбинации знаков не учтены	+–	8
Левая часть +1 разложена на множители и верно подсчитаны комбинации знаков число, распределение двоек по множителям подсчитано неверно	–+	4
Левая часть +1 разложена на множители	–*	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 7. Пусть t – единственный корень уравнения $x^3 - 3x - 4 = 0.$ Докажите, что t больше, чем $\sqrt[5]{46}.$

Решение.Сравним t^5 и 46. Заметим, что $t > 2$, так как $2^3 - 3 \cdot 2 - 4 < 0$. Так как $t^3 = 3t + 4$, то $t^5 = t^3 \cdot t^2 = (3t + 4) \cdot t^2 = 3t^3 + 4t^2 = 4t^2 + 9t + 12$. Докажем, что $4t^2 + 9t + 12 > 46$. Действительно, $4t^2 + 9t - 34 > 0$ тогда и только тогда, когда $t \in (-\infty; -\frac{17}{4}) \cup (2; +\infty)$. Так как $t > 2,$ то получаем то, что и требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	14
Допущена арифметическая ошибка, которая не влияет на ход решения задачи	+–	12
Имеется продвижение в решении, но доказательство не доведено до конца	–*	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 8. Заяц выписал все натуральные числа от 1 до 8100. Волк покрасил n чисел Зайца в красный цвет так, чтобы произведение любых двух различных красных чисел не было красным. При каком наибольшем n это возможно?

Решение. Пример: рассмотрим все числа от 90 до 8100 включительно, они подходят под условие, потому что произведение любых двух различных больше 8100. Количество таких чисел равняется 8011. Оценка: рассмотрим множества $\{89, 91, 89 \cdot 91\}$, $\{88, 92, 88 \cdot 92\}$, …, $\{2, 178, 2 \cdot 178\}$, $\{1, 179\}$. Заметим, что все эти 89 множеств попарно не пересекаются, а также все числа в них не больше 8100. В каждом из этих множеств хотя бы одно число не покрашено в красный, т.к. в каждом множестве одно из чисел является произведением двух других (в том числе $1 \cdot 179 = 179$). Таким образом, получаем, что красных чисел не больше, чем $8100 - 89 = 8011$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	16
Приведен верный ответ и доказано, что указанное в ответе число наибольшее из возможных. Пример, соответствующий числу в ответе, не приведен.	+–	10
Приведен верный ответ и показан соответствующий пример, но не доказано, что указанное в ответе число наибольшее из возможных	–+	4
Приведен только верный ответ или отсутствует решение	–	0