8-9 класс. Второй вариант

Задание 1. Гриша записал по действительному числу в каждую клетку таблицы 12×12. Оказалось, что сумма чисел в любых двух строчках больше 16. Обязательно ли найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 8?

Решение. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$ — сумма чисел в строках, а S — сумма чисел во всей таблице. Тогда

$$2S = (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + \ldots + (s_{11} + s_{12}) + (s_{12} + s_1) > 12 \cdot 16.$$

Получаем, что $S > 96$, тогда по принципу Дирихле сумма чисел в каком-то из столбцов хотя бы $\frac{S}{12} > \frac{96}{12} = 8$, что и требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен и обоснован вывод о наличии столбца	+	10
Доказано, что сумма чисел во всей таблице больше 96	±	5
Имеются продвижения в решении или используется утверждение про сумму всех чисел без доказательства	∓	1-3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 2. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых является удвоенным полным квадратом (числом вида $2n^2$, где n – некоторое натуральное число)?

Решение. Заметим, что если у натурального числа k девяток на конце, то с увеличением на 1, сумма цифр числа уменьшается на $9k - 1$. Получается, что нам нужно решить в целых числах уравнение $2a^2 + 9k - 1 = 2b^2$.

Возьмем в качестве $a = 9$, в качестве $b = 11$, тогда $k = 9$.

Возьмем такие последовательные числа: первое состоит из цифр: 1, двадцать раз цифра 8, девять раз цифра 9 18..89..9. Второе число состоит из 1, затем 19 раз подряд идущих 8, затем цифра 9, затем девять раз цифр 0.

Сумма цифр первого числа $1 + 20 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 242 = 2 \cdot 11^2$, сумма цифр второго числа $1 + 19 \cdot 8 + 9 = 162$.

Ответ: да, существует.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, приведён пример и объяснено, почему такие числа подходят	+	10
Приведён пример без доказательства, почему такие числа подходят	±	6
Составлено ключевое уравнение в целых числах, которое нужно решить, но не оно не решено	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 3. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из написанных так, чтобы сумма любых двух из них делилась на 11?

Решение. Рассмотрим три числа a, b, c такие, что $a + b, a + c, b + c$ делятся на 11. Тогда сумма этих трёх выражений $2(a + b + c)$ делится на 11, то есть $a + b + c$ также делится на 11. Таким образом, $(a + b + c) - (b + c) = a$ также делится на 11, аналогично с b и c. Получаем, что под условие подходят только все тройки, в которых все числа делятся на 11. Среди чисел от 1 до 1000 количество кратных 11 равняется [1000/11] = 90. Тогда ответ равен $C_{90}^{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117480$.

Ответ: 117480.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Формулы для числа способов написаны верно, но допущена арифметическая ошибка при подсчётах	+.	10
При подсчёте числа способов выражение не делится на факториал (вместо числа сочетаний используется число размещений)	±	8
Доказано, что каждое из трёх чисел должно делиться на 11	∓	4
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

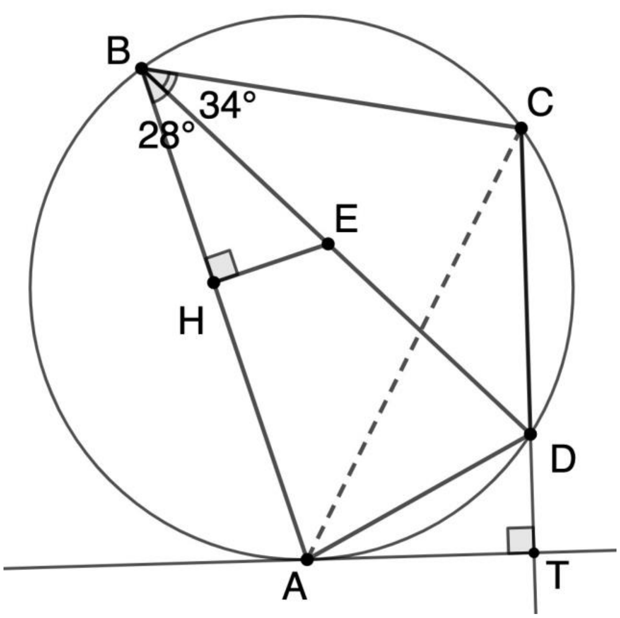
Задание 4. Сумма двух положительных чисел a, b равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1.$$

Решение. Так как $a + b = 1$ и числа положительные, то $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$. Получаем, что $a^2 < a$ и $b^2 < b$. Получаем: $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$, что и требовалось доказать.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
В решении без объяснения используется, что $a^2 < a$ или $b^2 < b$	+.	8
Неравенство алгебраическими выкладками сведено к тому, которое доказывается разложением на множители, но доказательство не приведено	∓	1-3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$ и $\angle CBD = 34^\circ$. На диагонали BD выбрана точка E так, что $BE = AD$. Из точки E опустили перпендикуляр EH на сторону AB. Докажите, что $AC > EH + CD$.

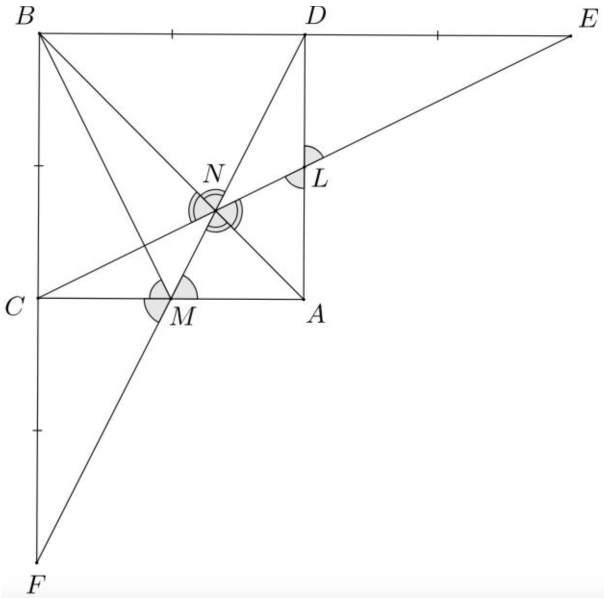


Решение. Заметим, что четырёхугольник $ABCD$ является вписанным, так как $\angle ABD = \angle ACD$. Из этого получаем, что $\angle ADC = 118^{\circ}$. Опустим перпендикуляр AT на прямую CD. Треугольники BEH и DAT равны по гипотенузе и острому углу, откуда $EH = D$. В прямоугольном треугольнике ACT гипотенуза AC больше катета CT, откуда получаем:

$AC > CD + DT = CD + EH$, что и требовалось доказать.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Доказана вписанность и опущен перпендикуляр из A на CD, но дальше никаких продвижений	+.	6
Выписано алгебраическое тригонометрическое выражение, доказывающее задачу, но не преобразовано до конца	∓	1-3
Доказано, что четырёхугольник является вписанным, но дальше никаких продвижений нет	∓	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 6. Бильярдный шар вылетел из вершины B прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB, прилетел в середину катета AC, потом прилетел в точку на гипотенузе, отлетел и попал в вершину прямого угла. Найдите острые углы треугольника.



Решение. Обозначим точки как на рисунке. Пусть D – симметрична C относительно AB, MN пересекает BC в точке F, CN пересекает прямые AD и BD в точках L и E соответственно. Тогда точки M, N, D лежат на одной прямой, т.к. $\angle BNM = \angle ANC = \angle AND$. В силу симметрии L – середина AD, тогда N – точка пересечения медиан $\triangle CAD$ и $DN = 2MN$. Треугольник BMF – р/б (MC – одновременно высота и биссектриса), значит $BM = MF$ и $BC = CF$. Точка E симметрична F относительно AB, в силу этой симметрии D – середина BE, значит N – точка пересечения медиан $\triangle FBE$ и $FN = 2DN = 4MN$.

Таким образом, $BM = FM = 3MN = DM \Rightarrow \angle DBF = 90^\circ$, но $\angle CBN = \angle DBN = \frac{\angle DBF}{2} = 45^\circ$. То есть исходный треугольник равнобедренный прямоугольный.

Ответ. $\angle B = \angle A = 45^\circ$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14

Доказано, что точка удара о катет AC – середина катета или точка удара о гипотенузу делит ее в отношении 2:1	$\pm$	8
Доказано, что точка удара о катет, о гипотенузу, отражение точки В относительно катета AC и точки C относительно гипотенузы AB лежат на одной прямой	$\mp$	4
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 7. В секретном совете участвует 83 человека, некоторые из которых друг с другом знакомы. Известно, что если на секретное собрание придут любые 43 участника этого совета, то каждый из них будет знаком хотя бы с одним из остальных 42 пришедших. Докажите, что любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.

Решение. Заметим, что у каждого участника совета должно быть не меньше 41 знакомого, докажем это от противного. Если количество знакомых у человека А меньше 41, то у него существует хотя бы 42 не знакомых. Если пригласить 43 участников — самого А и 42 его не знакомых, то человек А никого не будет знать, противоречие. Теперь рассмотрим любую пару не знакомых людей А и Б. Количество остальных людей равно 81, при этом А и Б оба знакомы хотя бы с 41 из оставшихся. Получаем, что у А и Б гарантированно есть общий знакомый, т.к. $41 \cdot 2 > 81$. Получаем требуемое: либо пара людей знакома, а если они не знакомы, то у них гарантированно есть общий знакомый.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Доказано, что у каждого участника не меньше 41 знакомого	$\pm$	8
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Задание 8. По кругу лежат 200 корзинок, в каждой из которых лежит хотя бы одна конфета, при этом общее количество конфет равно 2000. За один ход Петя может забрать себе все конфеты из 4 подряд идущих непустых корзинок, а Вася

за один ход может взять все конфеты из одной непустой корзинки, у которой хотя бы одна из соседних корзинок пуста. Начинает Петя. Докажите, что Петя гарантированно сможет забрать хотя бы 1600 конфет при любом изначальном расположении конфет и любых действиях Васи.

Решение. Пронумеруем все корзины по порядку числами от 1 до 200. Далее разделим все корзинки на 5 групп по остаткам их номеров при делении на 5. Посчитаем количество конфет в каждой группе и выберем меньшую группу, по принципу Дирихле в ней не более $\frac{2000}{5} = 400$ конфет. Тогда Петя может выбирать всегда 4 подряд идущих корзин, не включая выбранную группу. При такой стратегии у Васи на каждом ходу будут доступны только корзинки выбранной группы, что и требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Показано, что Петя может оставить Васе только корзины с фиксированным остатком по модулю 5	±	8
Алгоритм приведен только для конкретных случаев	-	0
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0