11 класс. Вариант 1

Задание 1. Пачка офисной бумаги в интернет-магазине стоит 630 руб., а при оплате за 15 пачек или более предусмотрен кешбэк в размере 10% от внесённой суммы. Как, имея изначально 20000руб., приобрести максимально возможное количество таких пачек? Определите это количество.

Решение. Любая пачка обойдётся покупателю не меньше, чем в

(1-0,1)·630=567 руб., а поскольку 20000<36·567, то купить удастся не более 35 пачек.

С другой стороны, 35 пачек приобрести можно. Внеся сначала 15·630 руб. за 15 пачек, после получения кешбэка покупатель будет иметь 20000-15·630+15·63=11495 руб. Это позволит ему внести 18·630=11340 руб. за 18 пачек. Новый кешбэк составит 1134 руб., и у покупателя окажется 11495-11340+1134=1289 руб. – сумма, достаточная для покупки ещё двух пачек бумаги.

Ответ: 35.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	10
Показан оптимальный вариант покупки, но обоснование оптимальности не приведено	+ –	6
Верно указано ограничение сверху, но достижимость максимального значения не доказана	– +	3

Задание 2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{\lg(x^2-1)}}$.

Решение. Искомая область – объединение множеств решений систем

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-4\geq 0 \\ \lg(x^2-1)>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-4\leq 0 \\ \lg(x^2-1)<0 \end{cases}$$

Первая система равносильна неравенству $x^2 \geq 4$ и имеет решение (-∞; -2] ∪ [2; +∞), вторая сводится к неравенствам $1 < x^2 < 2$, имеющим своим решением $\left(-\sqrt{2}\,;\,-1\right) \cup (1;\ \sqrt{2})$.

Ответ: (-∞; -2]∪ $\left(-\sqrt{2}\,;\,-1\right) \cup (1;\ \sqrt{2})$ ∪ [2; +∞).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	10

Выписаны все необходимые соотношения, но решение не найдено	– + –	3

Задание 3. Найдите все квадратные трёхчлены, максимальные значения каждого из которых на отрезках [0; 1], [1; 2] и [2; 3] равны 3, 6 и 8 соответственно.

Решение. Пусть трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям задачи, а выполнены равенства $f(x_1) = 3, f(x_2) = 6, f(x_3) = 8$, где x_1, x_2 и x_3 – числа, принадлежащие отрезкам [0; 1], [1; 2] и [2; 3] соответственно. В силу тождества $f(x-1) - 2f(x) + f(x+1) = 2a$ и очевидных неравенств $f(x_2 - 1) \le 3$, $f(x_2 + 1) \le 8$ тогда $a = \frac{1}{2}\big(f(x_2-1) - 2f(x_2) + f(x_2+1)\big) \le \frac{1}{2}(3 - 2 \cdot 6 + 8) = -\frac{1}{2} < 0$. Следовательно, ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз.

Неравенства $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ показывают, что $f(x)$ возрастает при $x \le 2$, а потому $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, откуда $a + b + c = 3$, $4a + 2b + c = 6$, $b = 3 - 3a$, $c = 2a$ и $f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + 2a$.

При $a = -\frac{1}{2}$ имеем трёхчлен $f_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 1$, максимальное значение которого на отрезке $[2; 3]$ равно 8. Если же $f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + 2a$, где $a < -\frac{1}{2}$, то $f(x) = f_0(x) + (a + \frac{1}{2})(x-1)(x-2) < f_0(x)$ при любом $x > 2$. Это значит, что $f_0(x)$ – единственный трёхчлен, удовлетворяющий всем нужным требованиям.

Ответ: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 1$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит пробелы	+ –	6
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит существенные пробелы	– +	4
Найден требуемый многочлен, но обоснование единственности отсутствует	– *	1

Задание 4. Все вершины тетраэдра *ABCD* равноудалены от точки *O*. Зная, что *AB* = *CD* = *a*, *BC* = *AD* = *b*, *AC* = *BD* = *c*, найдите радиус сферы, проходящей через *O* и через середины рёбер *AB*, *BC* и *AC*.

Решение. Достроим тетраэдр *ABCD* до параллелепипеда *AKBLNDMC (AN//KD//BM//LC),* проведя через его противоположные рёбра пары параллельных плоскостей. Ввиду равенств *KL=CD=AB, KM=AC=BD* и *KN=BC=AD* все грани этого параллелепипеда будут прямоугольниками, а сам параллелепипед – прямоугольным; точка *O* окажется его центром, а середины рёбер *AB, BC* и *AC* – центрами граней *AKBL, BLCM* и *ALCN* соответственно. Все эти центры принадлежат сфере, построенной на отрезке *OL* как на диаметре. Следовательно, искомый радиус равен $r=\frac{1}{2}OL=\frac{1}{4}LD=\frac{1}{4}\sqrt{LA^2+LB^2+LC^2}$, учитывая, что $LA^2+LB^2=a^2$, $LB^2+LC^2=b^2$, $LA^2+LC^2=c^2$, получаем $r=\frac{1}{8}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Ответ: $\frac{1}{8}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	12

Задание 5. Решите уравнение $3^{-\frac{1}{2}}+6^{-\frac{1}{2}+\log_6\sin x}=2^{-\frac{1}{2}+\log_2\cos x}$.

Решение. ОДЗ неизвестного определяется системой неравенств $\sin x>0$, $\cos x>0$. Уравнение $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sin x}{\sqrt{6}}=\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$, являющееся следствием исходного, преобразуется к уравнению $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Корни последнего описываются формулой $x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n=0,\pm1,\pm2,\dots$. Проверка оставляет только числа вида $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n=\frac{\pi}{12}+2\pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, где $n=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	12
Ответ содержит все верные решения и посторонние корни, ОДЗ указана	– +	3
ОДЗ не найдена, ответ содержит посторонние корни	– *	1

Задание 6. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD,* в котором $\angle BAC=\angle CAD$ и *AB>AD*. Прямая, делящая его внешний угол при вершине *A* пополам,

пересекает прямые BC, CD и BD в точках P, Q и R соответственно. Найдите длину отрезка AP, если $AQ=3$, $AR=18$.

Решение. Заметим, что лучи AP и AC являются биссектрисами двух смежных углов. Поэтому $AP \perp AC$ и $BB'//AC//DD'$, где B' и D' – проекции точек B и D на прямую AP.

Пусть b, c, d и p – длины отрезков AB', AC, AD' и AP соответственно, $k = ctg\angle BAC = ctg\angle CAD$. Тогда $\frac{p-b}{p} = \frac{kb}{c}$ (в силу подобия треугольников $PB'B$ и PAC) и $\frac{3-d}{3} = \frac{kd}{c}$ (в силу подобия треугольников $QD'D$ и QAC); из этих равенств следует , что $\frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$.

Условие $AB > AD$ означает, что $BB' > DD'$, а потому точки B и R лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. В силу подобия треугольников $RB'B$ и $RD'D$ имеем $\frac{18+b}{18-d} = \frac{kb}{kd}$, откуда $\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = -\frac{1}{9}$; следовательно $\frac{1}{p} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$, $p = \frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	14
Выписаны все необходимые соотношения, но верный ответ не получен/ Приведен верный ответ, но обоснование содержит пробелы	– +	6

Задание 7. Неизвестный 100-значный код составлен из цифр 1 и 2. За один шаг про любое натуральное число можно узнать, является ли оно фрагментом кода. (Фрагмент числа N – это любое число, образованное подряд идущими цифрами в записи N; например, N=1211 имеет ровно восемь фрагментов: 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211 и 1211). Докажите, что за 120 шагов можно узнать этот код.

Решение. Приведём план определения кода, предусматривающий не более 114 шагов. Этот план состоит из четырёх этапов.

Первый этап – определение максимального фрагмента, состоящего из одних единиц. Это делается методом двоичного поиска. (Сначала узнаём, является ли фрагментом кода число $\underbrace{1\ldots1}_{50}$. Если да, то ставим вопрос о числе

$\underbrace{1 \dots 1}_{75}$, а если нет, то о числе $\underbrace{1 \dots 1}_{25}$. И далее с каждым шагом уменьшаем вдвое или почти вдвое числовой интервал, содержащий длину искомого фрагмента.) Так как $2^6<100<2^7$, то сделано будет 7 шагов.

Пусть m – количество цифр в найденном фрагменте. Если m равно 0 или 100, то код определён и дальнейшие этапы не нужны. Если же $1 \leq m \leq 99$, то переходим ко второму этапу.

Второй этап – наращивание фрагмента влево. Сначала узнаём, является ли фрагментом $(m+1)$-значное число $A_1=2\underbrace{1 \dots 1}_{m}$. Если не является, то код начинается с m единиц и нужно сразу переходить к четвертому этапу. Если же A_1 – фрагмент, то последовательно ставим вопросы о числах $A_2 = 2c_1\underbrace{1 \dots 1}_{m}$, $A_3 = 2c_2c_1\underbrace{1 \dots 1}_{m}$, $A_4 = 2c_3c_2c_1\underbrace{1 \dots 1}_{m}$, …, где c_i - цифра, определённая на i-ом шаге, i=1, 2, 3, … . Продолжаем так до тех пор, пока не получим $m+1$ отрицательных ответов подряд. Пусть k – наибольший номер, для которого c_k =2. Тогда код начинается с фрагмента $\underbrace{1 + 1}_{l}c_k \dots c_1\underbrace{1 \dots 1}_{m}$, где l – некоторое целое число, $0 \leq l \leq m$.

Третий этап – определение начального фрагмента кода. Дело сводится к нахождению числа l. Применяя, как и на первом этапе, метод двоичного поиска, ставим вопросы о числах вида $\underbrace{1 + 1}_{r}c_k \dots c_1\underbrace{1 \dots 1}_{m}$, где $0 \leq r \leq l$. Здесь потребуется не более 7 шагов, и нам станет известен начальный $(k + l + m + 1)$-значный фрагмент.

Четвертый этап – наращивание фрагмента вправо. Последовательно делая по одному шагу, определяем с $(k + l + m + 2)$-й по 100-ю цифры кода. (При $k + l + m + 1 = 100$ этот этап не нужен.) Таким образом, для реализации всего плана потребуется не более $7 + (k + m + 1) + 7 + (100 - k - l - m - 1) = 114$ шагов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	14

Задание 8. Отрезок длины 1 двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = ax^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а

в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите множество всех возможных значений параметра a.

Решение. Пусть P(p; ap^2) и Q(q; aq^2) – концы отрезка, причем $p > q$ и $PQ = 1$. Обозначим через φ величину угла PQQ', где Q' – проекция точки Q на ось абсцисс. Тогда $q - p = -sin\varphi$, $aq^2 - ap^2 = cos\varphi$, откуда $q = -\frac{ctg\varphi}{2a} - \frac{sin\varphi}{2}$. Если функция $q = q(\varphi)$, отображающая интервал $(0; \pi)$ в интервал $(-\infty; +\infty)$, строго возрастает, то отрезок длины 1 можно переместить так, как это указано в условии задачи.

Имеем $q'(\varphi) = \frac{1}{2asin^2\varphi} - \frac{cos\varphi}{2}$. Неравенство $q'(\varphi) \geq 0$ преобразуется к виду $sin^2\varphi cos\varphi \leq \frac{1}{a}$, а исследование функции $u(\varphi) = sin^2\varphi cos\varphi$ показывает, что $u(\varphi) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, причем равенство достигается только при $\varphi = \varphi_0 = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Это значит, что полуинтервал $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ принадлежит множеству искомых значений a.

С другой стороны, при $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ имеем $q'(\varphi_0) < 0$, функция $q(\varphi)$ убывает в окрестности числа φ_0 и движение отрезка не может удовлетворять всем заданным условиям. Покажем также, что, если $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, то при движении отрезка обязательно был момент, когда выполнялось равенство $\varphi = \varphi_0$. В самом деле: для $p = 0$ имеем равенства $q = -sin\varphi$, $aq^2 = cos\varphi$ и, как следствие, соотношения $cos\varphi = \frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a} > 1 - \frac{1}{2a} > cos\varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$. А при $p + q = 0$ имеем $cos\varphi = aq^2 - ap^2 = 0$, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2} > \varphi_0$. Ввиду непрерывности изменения величины φ и делаем вывод о существовании указанного момента.

Ответ: $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	16
Множество возможных значений параметра найдено и доказано, что все значения из этого множества удовлетворяют условиям задачи, но не доказано, что условиям задачи не удовлетворяют значения, не входящие в указанное множество.	+ –	12

Имеется существенное продвижение в решении задачи (найдена функция одной переменной, описывающая движение отрезка)	– +	4