11 класс. Вариант 2

Задание 1. Набор пряжи в интернет-магазине стоит 620 руб., а при оплате за 20 или более наборов предусмотрен кешбэк в размере 15% от внесённой суммы. Как, имея изначально 30000 руб., приобрести максимально возможное количество таких наборов? Определите это количество, а также сумму, которую придётся на него потратить.

Решение. Любой набор обойдётся покупателю не меньше, чем в

(1-0,15)·620=527 руб., а поскольку 30000<57·527, то купить удастся не более 56 наборов.

С другой стороны, 56 наборов приобрести можно. Внеся сначала 20·620 руб. за 20 наборов, после получения кешбэка покупатель будет иметь 30000-20·620+0,15·20·620=19460 руб. Это позволит ему внести 31·620=19220 руб. за 31 набор. Новый кешбэк составит 0,15·19220=2883 руб., и у покупателя окажется 19460-19220+2883=3123 руб. – сумма, достаточная для покупки ещё 5 наборов пряжи.

Ответ: 56.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	10
Показан оптимальный вариант покупки, но обоснование оптимальности не приведено	+ –	6
Верно указано ограничение сверху, но достижимость максимального значения не доказана	– +	3

Задание 2. Найдите область определения функции $y = lg\frac{3-2x-x^2}{1-x^2}$.

Решение. Искомая область – решение неравенства $\frac{3-2x-x^2}{1-x^2} > 0$.

Применяя метод интервалов, находим ответ.

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	10
Выписаны все необходимые соотношения, но решение не найдено	– + –	3

Задание 3. Найдите все квадратные трёхчлены, минимальные значения каждого из которых на отрезках [0; 1], [1; 2] и [2; 3] равны 3, 6 и 7 соответственно.

Решение. Пусть трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям задачи и выполнены равенства $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 6$, $f(x_3) = 7$, где x_1, x_2 и x_3

– числа, принадлежащие отрезкам [0; 1], [1; 2] и [2; 3] соответственно. Из неравенств $\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2} < 6$ и $1 \le \frac{x_1+x_3}{2} \le 2$ тогда получается, что $\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)$. Следовательно, ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз.

Неравенства $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ показывают, что $f(x)$ возрастает при $x \le 2$, а потому $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_1) = c = 3$, $f(x_2) = a + b + c = 6$, откуда $b = 3 - a$ и $f(x) = ax^2 + (3 - a)x + 3$.

Заметим теперь, что $f(3) = 6a + 12 \ge f(x_3) = 7$. Поэтому $a \ge -\frac{5}{6}$. При $a = -\frac{5}{6}$ имеем трёхчлен $f_0(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{23}{6}x + 3$, минимальное значение которого на отрезке [2; 3] равно 7.

Если же $a > -\frac{5}{6}$, то $f(x) = f_0(x) + (a + \frac{5}{6})(x^2 - x) > f_0(x)$ при любом $x > 1$. Это значит, что трёхчлен $f_0(x)$ – единственный, удовлетворяющий всем требованиям.

Ответ: $-\frac{5}{6}x^2 + \frac{23}{6}x + 3$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит пробелы	+ –	6
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит существенные пробелы	– +	4
Найден требуемый многочлен, но обоснование единственности отсутствует	– *	1

Задание 4. Все вершины тетраэдра *ABCD* равноудалены от точки *O*. Зная, что *AB* = *CD* = *a*, *BC* = *AD* = *b*, *AC* = *BD* = *c*, найдите радиус сферы, проходящей через *O* и через середины медиан треугольника *ABC*.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* проведены медианы AA_1 , BB_1 и CC_1, середины которых обозначены через A_2, B_2 и C_2 соответственно, а точка пересечения этих медиан – через *M*. Докажем, что тетраэдр $OA_2B_2C_2$ является образом тетраэдра *ABCD* при гомотетии центром *M* и коэффициентом $\frac{1}{4}$.

Легко установить, что $\overrightarrow{MA_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$. Для доказательства равенства $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$ рассмотрим отрезок C_1C_1', где C_1' - середина ребра *CD*. Этот отрезок является высотой, проведённой к основанию, в каждом из двух равных равнобедренных треугольников - $AC_1'B$ и CC_1D; ясно, что середина отрезка C_1C_1' равноудалена от точек *A*, *B*, *C* и *D*, а потому совпадает с точкой *O*. Следовательно, плоскость *OCD* содержит точку C_1, а значит, и отрезок CC_1 с точкой M на нём. По аналогичным причинам точку M содержат плоскости *OAD* и *OBD*. Поэтому M – точка пересечения прямой *OD* с плоскостью *ABC*. Остаётся заметить, что тетраэдры *OABC, OABD, OBCD* и *OACD* равны, объём тетраэдра *OABC* составляет $\frac{1}{4}$ объёма тетраэдра *ABCD*, откуда и выводится равенство $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.

Из доказанного следует, что искомый радиус равен $\frac{r}{4}$, где r – радиус описанной сферы тетраэдра *ABCD*. Найдём *r*.

Достроим тетраэдр *ABCD* до параллелепипеда *APBQRDSC (AR//PD//BS//QC)*, проведя через его противоположные рёбра пары параллельных плоскостей. В силу равенств *PQ=CD=AB, PS=AC=BD* и *PR=BC=AD* все грани этого параллелепипеда будут прямоугольниками, а сам параллелепипед – прямоугольным. Диаметр его описанной сферы равен $2r = \sqrt{AP^2 + AQ^2 + AR^2}$, а поскольку $AP^2 + AQ^2 = AB^2 = a^2$, $AP^2 + AR^2 = BC^2 = b^2$ и $AQ^2 + AR^2 = c^2$, то $r = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$, $\frac{r}{4} = \frac{1}{16}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Ответ: $\frac{1}{16}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	12

Задание 5. Решите уравнение $2 - 6^{\frac{1}{2}+\log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2}+\log_2 \cos x}$.

Решение. ОДЗ неизвестного задаётся системой неравенств $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Уравнение $2 - \sqrt{6}\, sinx = \sqrt{2}\, cosx$, являющееся следствием исходного, преобразуется к виду $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Корни последнего описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Проверка оставляет только числа вида $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$.

Ответ: $\frac{1}{12}\pi + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	12
Ответ содержит все верные решения и посторонние корни, ОДЗ указана	– +	3
ОДЗ не найдена, ответ содержит посторонние корни	– *	1

Задание 6. В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *BH*, а на сторонах *AB* и *BC* выбраны точки *M* и *N* так, что прямые *HM* и *HN* симметричны друг другу относительно прямой *BH*. Прямые *MN* и *AC* пересекаются в точке *K*. Найдите длину отрезка *AK*, если *AH=6, HC=9.*

Решение. Пусть M' и N' - проекции точек *M* и *N* на прямую *AC*, m, n, h и x – длины отрезков $M'H$, HN', *BH* и *HK* соответственно. Тогда $M'K = x - m$, $N'K = x + n$, $MM' = km$, $NN' = kn$, где k – тангенс каждого из углов MHM' NHN' (равенство этих углов следует непосредственно из условия задачи).

В силу подобия треугольников MKM' и NKN' имеем равенство $\frac{x-m}{x+n} = \frac{km}{kn}$, откуда $x = \frac{2mn}{n-m}$. Пользуясь, далее тем, что треугольник AMM' подобен треугольнику *ABH*, а треугольник CNN'- треугольнику *CBH*, записываем равенства $\frac{6-m}{6} = \frac{km}{h}$ и $\frac{9-n}{9} = \frac{kn}{h}$; из них следует, что $\frac{mn}{n-m} = 18$. Поэтому $x = 2 \cdot 18 = 36$, $AK = 36 - 6 = 30$.

Ответ: 30.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	+ +	14
Выписаны все необходимые соотношения, но верный ответ не получен/ Приведен верный ответ, но обоснование содержит пробелы	– +	6

Задание 7. Неизвестный 100-значный код *X* составлен из цифр 1 и 2. Характеристикой произвольного 100-значного числа *Y*, также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа *Y* совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых 80 чисел $Y_1, \dots, Y_{80}$, можно гарантированно определить *X*.

Решение. Опишем способ определения кода $X = \overline{x_1 \dots x_{100}}$, где $x_1, \dots, x_{100}$ – цифры. Для этого разобъём *X* на 20 частей по 5 цифр: $X_1 = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$, $X_2 = \overline{x_6x_7x_8x_9x_{10}}$, …, $X_{20} = \overline{x_{96}x_{97}x_{98}x_{99}x_{100}}$. Через p_i будем обозначать характеристику числа Y_i, i=1, …, 80. Положим $Y_1 = \underbrace{1 \dots 1}_{100}$. Тогда по характеристикам чисел Y_1, $Y_2 = 22111\underbrace{1 \dots 1}_{95}$, $Y_3 = 12211\underbrace{1 \dots 1}_{95}$, $Y_4 = 11221\underbrace{1 \dots 1}_{95}$ и $Y_5 = 12121\underbrace{1 \dots 1}_{95}$ гарантированно определяется X_1. В самом деле: если $p_k \neq p_1$ для какого-нибудь k от 2 до 4, то разность $p_k - p_1$ равна 2 или -2. В первом случае имеем равенства $x_{k-1} = x_k = 2$, во втором - $x_{k-1} = x_k = 1$; легко видеть, что в обоих случаях определяются и все остальные цифры, составляющие X_1. Если же $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, то X_1 равно либо 12121, либо 12122, либо 21211, либо 21212. Первый из этих случаев имеет место при $p_5 = p_1 + 2$, второй – при $p_5 = p_1 + 1$, третий – при $p_5 = p_1 - 2$, четвёртый – при $p_5 = p_1 - 3$.

Аналогично, по характеристикам чисел Y_1, $Y_6 = \underbrace{1\dots1}_{5}22111\underbrace{1\dots1}_{90}$, $Y_7 = \underbrace{1\dots1}_{5}12211\underbrace{1\dots1}_{90}$, $Y_8 = \underbrace{1\dots1}_{5}11221\underbrace{1\dots1}_{90}$ и $Y_9 = \underbrace{1\dots1}_{5}12121\underbrace{1\dots1}_{90}$ определяем X_2 и так далее, до X_{19}. Заметим, что здесь уже будет известно количество единиц в X_{20} (поскольку будут известны число p_1 и цифры $x_1, \dots, x_{95}$), и для определения X_{20} окажется достаточным знание характеристик всего трёх чисел, например, $Y_{78} = \underbrace{1\dots1}_{95}22111$, $Y_{79} = \underbrace{1\dots1}_{95}21211$ и $Y_{80} = \underbrace{1\dots1}_{95}21121$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	14

Задание 8. Отрезок длины d двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = x^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные значения d.

Решение. Пусть $P(p;\ p^2)$ и $Q(q;\ q^2)$ – концы отрезка, причём $p > q$, $PQ = d$. Обозначим через φ величину угла PQQ', где Q' - проекция точки Q на ось абсцисс. Тогда $q - p = -d\,sin\varphi$, $q^2 - p^2 = d\,cos\varphi$, откуда $q = -\frac{ctg\varphi}{2} - \frac{d\,sin\varphi}{2}$. Выясним, при каких d функция $q = q(\varphi)$ строго возрастает на интервале $(0; \pi)$.

Имеем $q'(\varphi) = \frac{1}{2sin^2\varphi} - \frac{dcos\varphi}{2}$. Неравенство $q'(\varphi) \geq 0$ преобразуется к виду $sin^2\varphi\,cos\varphi \leq \frac{1}{d}$, а исследование функции $u(\varphi) = sin^2\varphi\,cos\varphi$ показывает, что $u(\varphi) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, причём равенство достигается только при $\varphi = \varphi_0 = arc\,cos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, достаточным условием для указанного в задаче перемещения является неравенство $d \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Покажем, что если $d > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, то при движении отрезка из полуплоскости $x < 0$ в полуплоскость $x > 0$ обязательно есть момент, когда выполняется равенство $\varphi = \varphi_0$. В самом деле: при $p = 0$ имеем $q = -d\,sin\varphi$, $q^2 = d\,cos\varphi$ и, как следствие, соотношения $cos\varphi = \frac{-1+\sqrt{4d^2+1}}{2d} > 1 - \frac{1}{2d} > cos\varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$. А при $p + q = 0$ имеем $cos\varphi = 0$, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2} > \varphi_0$. Ввиду непрерывности изменения величины φ и делаем вывод о существовании указанного момента.

Но $q'(\varphi_0) < 0$ и $q(\varphi)$ убывает в некоторой окрестности числа φ_0. Поэтому движение отрезка не может удовлетворять всем заданным условиям.

Ответ: $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	16
Множество возможных значений параметра найдено и доказано, что все значения из этого множества удовлетворяют условиям задачи, но не доказано, что условиям задачи не удовлетворяют значения, не входящие в указанное множество.	+ –	12
Имеется существенное продвижение в решении задачи (найдена функция одной переменной, описывающая движение отрезка)	– +	4