

Олимпиада 11 класс

Вариант 2

1. **(10 баллов)** Набор пряжи в интернет-магазине стоит 620 руб., а при оплате за 20 или более наборов предусмотрен кешбэк в размере 15% от внесённой суммы. Как, имея изначально 30000 руб., приобрести максимально возможное количество таких наборов? Определите это количество.
2. **(10 баллов)** Найдите область определения функции $y = \lg \frac{3-2x-x^2}{1-x^2}$.
3. **(12 баллов)** Найдите все квадратные трёхчлены, минимальные значения каждого из которых на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ равны 3, 6 и 7 соответственно.
4. **(12 баллов)** Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O . Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины медиан треугольника ABC .
5. **(12 баллов)** Решите уравнение $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.
6. **(14 баллов)** В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH , а на сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что прямые HM и HN симметричны друг другу относительно прямой BH . Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AN = 6$, $HC = 9$.
7. **(14 баллов)** Неизвестный 100-значный код X составлен из цифр 1 и 2. Характеристикой произвольного 100-значного числа Y , также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа Y совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых фиксированных 80 чисел $Y_1, \dots, Y_{80}$, можно определить X .
8. **(16 баллов)** Отрезок длины d двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = x^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные значения d .